

Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes

Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 5 - Ableitungen I

Aufgabe 1: Elementare Ableitungen

Leiten Sie folgende Funktionen ab:

(a) $f(x) = x^n$

(e) $f(x) = \sin x$

(i) $f(x) = \arccos x$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^n}$

(f) $f(x) = \cos x$

(j) $f(x) = \arctan x$

(c) $f(x) = e^x$

(g) $f(x) = \tan x$

(k) $f(x) = \sinh x$

(d) $f(x) = \ln x$

(h) $f(x) = \arcsin x$

(l) $f(x) = \cosh x$

Aufgabe 2: Produktregel und Quotientenregel

Leiten Sie mit Hilfe der Produktregel oder der Quotientenregel ab:

(a) $f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 1)$

(f) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}(1 - x^3)$

(c) $f(x) = (x^2 + 1)\sin x$

(g) $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

(d) $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{1 + 3x^2}$

(h) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 3: Kettenregel

Leiten Sie mit Hilfe der Kettenregel ab:

(a) $f(x) = (6x^4 + 2)^8$

(c) $f(x) = \ln(4 + 3x^2)$

(e) $f(x) = \ln(\cos(x - 2x^4))$

(b) $f(x) = 3 \cos^4 x$

(d) $f(x) = e^{(2x+1)^2}$

(f) $f(x) = e^{x \sin(2x)}$

Aufgabe 4: Ableitungen

Leiten Sie ab:

(a) $f(x) = \frac{1+x}{\ln(1-x)}$

(e) $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$

(b) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(4\pi x)$

(f) $f(x) = e^{\sin^2 x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$

(g) $f(x) = \ln \cos \frac{x-1}{x}$

(d) $f(x) = (x^3 + 6x)e^{-x^2}$

(h) $f(x) = e^{\alpha x} \cosh \beta x$

Aufgabe 5: Ableitungen

Leiten Sie ab:

(a) $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$

(b) $f(x) = \frac{1}{x} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(c) $f(x) = (x^2 - 2x + 2) e^x$

(d) $f(x) = \frac{3 \coth x}{\ln x}$

(e) $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$

(g) $f(x) = -\frac{1}{6(1-3 \cos x)^2}$

(h) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2x + 1} + \ln^3 x$

(i) $f(t) = \sin t \sin(t + \varphi)$

(j) $f(x) = x^2 10^{2x}$

(k) $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$

(l) $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7} x \sqrt[6]{x} + \frac{9}{5} x \sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13} x^2 \sqrt[6]{x}$

(i) $f(x) = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$

(j) $f(x) = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} + \frac{4}{3} \cot x$

(k) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

(l) $f(x) = 3 \frac{\sin ax}{\cos bx} + \frac{1}{3} \frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$

Aufgabe 6: Partielle Ableitungen

Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen nach x , y und t d.h. $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y$ und $\partial f / \partial t)$:

(a) $f(x, y, t) = Ax^2 + By^5 + 3$

(c) $f(x, y, t) = a \left(\frac{x}{y}\right)^3 e^{-bt}$

(b) $f(x, y, t) = \ln(x^2 + y^2) \cdot \frac{1}{t}$

(d) $f(x, y, t) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Aufgabe 7: Mehrfache partielle Ableitungen

(a) Bestimmen Sie alle zweifache partielle Ableitungen von:

$$f(x, y) = x^2 + x e^{-y^2}$$

Spielt die Reihenfolge der Ableitungen eine Rolle?

(b) Bestimmen Sie die gemischte partielle Ableitung für $\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$

$$f(x, y, z) = \frac{x^3}{x^2 + y^2 + 1} e^y + \ln(xy) + z e^{xy}$$

Denken Sie vorher über die Reihenfolge der Ableitungen nach!

Aufgabe 8: Unterschied zwischen totaler und partieller Ableitung

Gegeben sind die Funktionen:

$$E(x, t) = \frac{1}{2} D x^2 - \gamma t \quad x(t) = v_x t$$

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial E}{\partial t}$$

und die totalen Ableitungen

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dE}{dt}$$