Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes
Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 6 - Integration

Aufgabe 1: Einfache Integrale

Finden Sie eine Stammfunktion zu folgenden Funktionen (wo $n, m \in \mathbb{N}$):

(a) $f(x) = 7x^3$

(b) $g(y) = y^2 - 4y$

(c) $f(t) = s^2t^3$

(d) $f(x) = ab^2x^3$

(e) $g(x) = s^3x^3 - 2sx^{-2}$

(f) $k(t) = \frac{2}{ct^3}$

(g) $g(x) = \frac{4}{cx^{2-n}}$

(h) $g(s) = \frac{c+1}{cs^{2n}}$

(i) $f(x) = 5x^m + \frac{3}{x^{-3-n}}$

(j) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$

(k) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{\sqrt{ax}}$

(l) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}$

Aufgabe 2: Substitution I

Finden Sie eine Stammfunktion mit Hilfe der angegebenen Substitution:

(a) $f(x) = (1-5x)^3, \quad u(x) = 1-5x$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad u(x) = 1+x^2$

(c) $f(x) = \cos(x)\cdot(1-\sin(x)^2), \quad u(x) = \sin(x)$

(d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x(u) = \cos(u)$

Aufgabe 3: Substitution II

Berechnen Sie das Integral mit Hilfe einer passenden Substitution:

(a) $\displaystyle\int \sin(3x+5)\,dx$

(b) $\displaystyle\int e^{4t-3}\,dt$

(c) $\displaystyle\int y^2 e^{y^3}\,dy$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln(x)}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{\sqrt{a}}\,da$

(g) $\displaystyle\int x^{-2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

(h) $\displaystyle\int \frac{(\ln(t))^2}{t}\,dt$

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(k) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$

(l) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{a^2-x^2}\,dx$

(n) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{\sin 3x}{3+\cos 3x}\,dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,dx$

(q) $\displaystyle\int \sinh^2 x\,dx$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

Aufgabe 4: Trigonometrische Substitution

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe einer trigonometrischen Substitution.

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

Aufgabe 5: Hyperbolische Substitution

Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$$

mit Hilfe einer hyperbolischen Substitution $x = a\sinh t$.

Aufgabe 6: Partielle Integration

Berechnen Sie die Integrale mit Hilfe von partieller Integration:

(a) $\displaystyle\int \ln(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin(x)\,dx$

(c) $\displaystyle\int xe^{2x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$

(g) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

(h) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(i) $\displaystyle\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx$

Aufgabe 7: Integralen von trigonometrischen Funktionen

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$

(b) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}$

(e) $\displaystyle\int \sin 3x\ \cos 5x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \sin\omega t\ \sin(\omega t+\varphi)\,dt$

(g) $\displaystyle\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$

Hinweis: Nützliche Substitution $t = \tan x$ oder $t = \tan x/2$ siehe auch Aufgaben 5 und 6 auf Blatt aus Woche 3.