Mathe-Repetitorium zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. P.Krüger, Prof. Dr. A.Kappes
Mathe-Rep: Dr. K.Kovařík

Woche 7 - Ableitungen II

Aufgabe 1: Ableitungen von parametrischen Funktionen

Leiten Sie die Funktionen nach dem Parameter t ab und berechnen Sie auch die Ableitung dy/dx.

(a) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\sin^2 t \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x = a\Big(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t - \sin t\Big) \\ y = a\Big(\sin t + \cos t\Big) \end{cases}$

Aufgabe 2: Tangenten

(a) Berechnen Sie den Winkel, unter welchen sich die folgende Kurven schneiden

$$y = x^2 \qquad\qquad y = x^3$$

(b) Zeigen Sie, dass sich die Kurven unter einem rechten Winkel schneiden

$$xy = a^2 \qquad\qquad x^2 - y = b^2$$

Aufgabe 3: Tangenten und Normalen

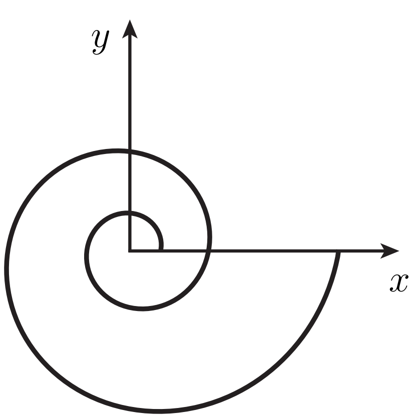
Berechnen Sie die Tangente, die Normale und den Winkel zwischen der Tangente und dem Ortsvektor für

(a) die logarithmische Spirale

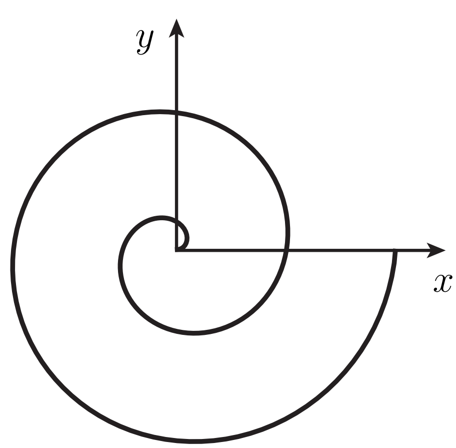
$$r = ae^{k\varphi}$$

(b) die Archimedes Spirale

$$r = a\varphi$$



(a)



(b)

Aufgabe 4: Gradient, Divergenz und Rotation

Berechnen Sie die folgende differenziale Operatoren angewand an ein Vektorfeld $\vec{A}$ und Skalarfeld φ oder eine Kombination davon.

(a) $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{A}))$ mit $\varphi = \frac{x}{y}$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

(b) $\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{A}))$ mit $\varphi = \frac{x}{y}$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$ mit $\varphi = \frac{x}{y}$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

(d) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ mit $\varphi = \frac{x}{y}$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div}(\varphi \cdot \vec{A}))$ mit $\varphi = xy^2z^3$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} x^3z \\ yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(f) $\operatorname{rot}(\varphi \cdot \vec{A}))$ mit $\varphi = xy^2z^3$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} x^3z \\ yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(g) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)$ mit $\varphi = xy^2z^3$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} x^3z \\ yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(h) $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)$ mit $\varphi = xy^2z^3$ und $\vec{A} = \begin{pmatrix} x^3z \\ yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5: Differentialoperatoren und Ortsvektor

Gegeben sei der Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ mit $r = |\vec{r}|$. Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit div, grad, rot und berechnen Sie in kartesischen Koordinaten:

(a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{r}$

(b) $\vec{\nabla} \times \vec{r}$

(c) $\vec{\nabla} r$

(d) $\vec{\nabla} \cdot (r^n \cdot \vec{r})$

(e) $\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

(f) Δr^n

(g) $\Delta \frac{1}{r}$

Prüfen Sie die Ergebnisse von (c)-(g) nach, indem Sie Formeln benutzen, die für Funktionen gelten, die nur von $r = |r|$ abhängen.

Aufgabe 6: Achtung Klammern

Ganz selten sieht man einen Ausdruck der folgenden Art:

$$\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{A}$$

Was bedeutet dies? Berechnen Sie den Ausdruck für Vektorfelde

(a) $\vec{A} = \begin{pmatrix} x^3z \\ yz^3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{A} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}$

(c) $\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$