Aufgabe 1: Vektorrechnung (mündlich, 6 Bonuspunkte)

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Zeichnen Sie die beiden Vektoren.

2) Konstruieren Sie (durch Zeichnung) $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$.

3) Zeichnen Sie den Vektor $3\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$.

b) Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1) Berechnen Sie die Beträge von $\vec{a}$ und von $\vec{b}$.

2) Berechnen Sie $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ und deren Beträge.

3) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und daraus den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aufgabe 2: Differentialrechnung (mündlich, 10 Bonuspunkte)

Gegeben seien die Funktionen

$$f_1(x) = \sin x \qquad f_2(x) = \cos x$$

$$f_3(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad f_4(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$$

$$f_5(x) = \arccos(x) \qquad f_6(x) = \arctan(x)$$

$$f_7(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f_8(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f_9(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad f_{10}(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$$

a) Skizzieren Sie die Funktionen. Überlegen Sie sich dazu bei den Funktionen $f_7(x)$ bis $f_{10}(x)$ deren Verhalten bei $x = 0$ und für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$.

b) Berechnen Sie die 1. und 2. Ableitung der Funktionen $f_1(x)$ bis $f_{10}(x)$.

Aufgabe 3: Höhere Ableitungen (mündlich, 4 Bonuspunkte)

Sei $f(x)$ eine mindestens n-mal differenzierbare Funktion. Dann bezeichnet

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{d}{d\,x} f(x)$$

die erste Ableitung der Funktion. Die zweite Ableitung schreibt man in folgender Form:

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2}{d\,x^2}\, f(x) = \frac{d}{d\,x}\, f^{(1)}(x) \ .$$

Die n-te Ableitung von $f(x)$ ist durch

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{d\,x^n}\, f(x)$$

gegeben. Analog definiert man

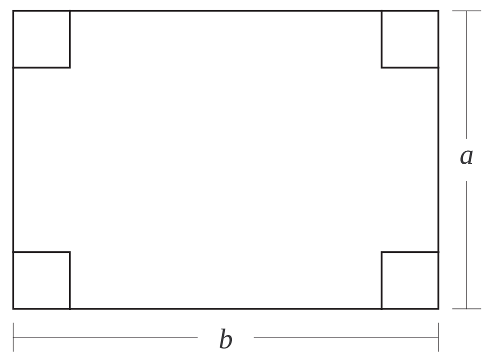
$$f^{(0)}(x) = f(x) \ .$$

a) Berechnen Sie die dritte Ableitung von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

b) Berechnen Sie die n-te Ableitung von $f(x) = e^{-x}$.

Aufgabe 4: Extremwerte (mündlich, 3 Bonuspunkte)

Auf einem rechteckigen Stück Blech mit den Seitenlängen $a = 8$ cm und $b = 5$ cm soll nach Aussägen eines Quadrates an den Ecken des Rechtecks und Hochbiegen der dadurch entstandenen Randflächen ein oben offenes Kästchen mit möglichst großem Rauminhalt hergestellt werden.
Berechnen Sie die Seitenlänge der herauszusägenden Quadrate und das Volumen des Kästchens.



Aufgabe 5: Exponentialfunktion (mündlich, 8 Punkte)

Die Exponentialfunktion $y = \exp(x) = e^x$ lässt sich durch folgende Reihe darstellen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ .$$

Beweisen Sie, ausgehend von der Reihendarstellung, folgende Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1) $e^0 = 1$ 2) $e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$.

Zeigen Sie dann die weiteren Eigenschaften:

3) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ 4) $e^x > 0$

5) $e^x \geq 1 + x$ für $x \geq 0$ 6) $e^{x_1} > e^{x_2}$ für $x_1 > x_2$.

Skizzieren Sie $y = e^x$ und berechnen Sie e^1 aus den ersten 10 Termen der Reihe.

Hinweis: Nutzen Sie bei 2) den Binomischen Satz

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j\, b^{n-j}$$

aus und wandeln Sie Summen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n}$ in solche der Form $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=j}^{\infty}$ um.

Aufgabe 6: Bewegungen (mündlich, 4 Bonuspunkte)

a) Bei einer Radtour im Gebirge wird das Fahrrad bergauf geschoben ($v_1 = 5$ km/h). Bergab fährt das Rad mit etwa $v_2 = 45$ km/h schnell. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit, wenn die Teilstrecken bergauf und bergab gleich lang sind?

b) Um mit einer Rolltreppe von einem Stockwerk zum anderen zu fahren, benötigt man $t_1 = 10$ s. Um über die stehende Rolltreppe zu gehen, benötigt man $t_2 = 30$ s. Wie lange braucht man, wenn man auf der laufenden Rolltreppe geht?

Aufgabe 7: Rechnen mit Einheiten (mündlich, 2 Bonuspunkte)

a) Drücken Sie die Winkel $1°$ (Grad), $1'$ (Winkelminute) und $1''$ (Winkelsekunde) im Bogenmaß (rad) aus!

b) Um wieviel Sekunden geht eine gute Quarzuhr mit einer relativen Genauigkeit von 10^{-9} maximal in einem Jahr falsch?

Aufgabe 8: Entfernungen in der Astronomie (mündlich, 3 Bonuspunkte)

In der Astronomie werden oft – abweichend vom SI-System – andere Längeneinheiten verwendet, die auf dem mittleren Radius der Erdbahn um die Sonne (astronomische Einheit AE) bzw. auf der Lichtgeschwindigkeit beruhen.

a) Welcher Strecke entspricht ein Lichtjahr (ly) (die Strecke, die Licht in einem Jahr zurücklegt)?

b) Ein Parsec (pc) ist definiert als der Abstand, von dem aus ein Objekt der Größe 1 AE (1 AE $\approx 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m) unter einem Winkel α von einer Winkelsekunde ($1''$) erscheint. Drücken Sie die Einheit pc in m und in Lichtjahren aus!

c) Der nächste Fixstern (Alpha Centauri) ist etwa $d = 4{,}3 \cdot 10^{16}$ m entfernt. Drücken Sie diesen Abstand in Parsec und in Lichtjahren aus!

Aufgabe 9: Integralrechnung (schriftlich, 12 Bonuspunkte)

a) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale $I = \int f(x)\, d(x)$:

1) $f(x) = 2x + 4x^2 + 5x^3$

2) $f(x) = -\cos x$

3) $f(x) = \dfrac{x}{(a^2 + x^2)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - x^2 - x + 1}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

6) $f(x) = \sinh x \cdot \cosh x$

7) $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$

8) $f(x) = x^2 \cos x$

9) $f(x) = \sqrt{1 + 5x}$

10) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

Hinweis: Verwenden Sie ggfs. eine partielle Integration oder eine Integration durch Substitution.

b) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \, d x \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{-4}^{3} |x| \, d x \ .$$

Aufgabe 10: Taylorpolynom **(schriftlich, 8 Bonuspunkte)**

Bei der Behandlung physikalischer Fragestellungen treten häufig „kompliziertere“ Funktionen auf, die man durch einfacher handhabbare Polynome approximieren möchte. Bei der Darstellung einer Funktion $f(x)$ in der Umgebung einer Stelle x_0 durch ein sogenanntes Taylorpolynom $g_n(x)$ vom Grad n fordert man, dass für $x = x_0$ sowohl die Funktionswerte $f(x_0) = g_n(x_0)$ als auch die Ableitungen $f'(x_0) = g_n'(x_0)$, $f''(x_0) = g_n''(x_0)$ bis $f^{(n)}(x_0) = g_n^{(n)}(x_0)$ übereinstimmen. Dann hat das Taylorpolynom die Form

$$g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_0)(x - x_0)^j = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

a) Überzeugen Sie sich davon, dass $g_n(x)$ die obigen Forderungen erfüllt (indem Sie $g_n'(x_0)$, $g_n''(x_0)$ und $g_n^{(n)}(x_0)$ berechnen).

b) Berechnen Sie für $f(x) = \sin(x)$ die drei Taylorpolynome mit $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ an der Stelle $x_0 = 0$. Skizzieren Sie $f(x)$ und die drei Polynome. Führen Sie die analogen Rechnungen und Skizzen für die Taylorpolynome an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ aus.

c) Berechnen Sie für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ die Taylorpolynome $g_1(x)$ und $g_2(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$. Skizzieren Sie ihre Resultate. Berechnen Sie die Abweichung $f(x) - g_1(x)$ bzw. $f(x) - g_2(x)$ für $-1 < x \leq 1$ in Schritten von 0,1.