Aufgabe 53: Relativistische Energie (6 Bonuspunkte)

In der Vorlesung wurde für Geschwindigkeiten v, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c sind, beim Vergleich von relativistischer und „klassischer“ Energie die *Taylorentwicklung*

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

verwendet. Dabei ist $\beta = \frac{v}{c}$.

Verfizieren Sie diese Beziehung, indem Sie $\beta^2 = x$ setzen und das Taylorpolynom vom Grad 2 (siehe Aufgabe 10) an der Stelle $x_0 = 0$ berechnen.

Aufgabe 54: Gravitationspotential (7 Bonuspunkte)

Ein Körper der Masse m befinde sich im Gravitationspotential der Erde

$$V(r) = -\frac{m\,M\,G}{r}\ .$$

Dabei ist r der Abstand des Körpers vom Mittelpunkt der Erde. In der Nähe der Erdoberfläche ist es sinnvoll, das Potential in Abhängigkeit von der Höhe z über der Oberfläche darzustellen. Der Abstand vom Erdmittelpunkt hat dann die Form $r = R + z = R(1 + \frac{z}{R})$. Dabei ist R der Erdradius.

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass sich das Gravitationspotential für $z \ll R$ in der Form

$$V(z) = -m\,K + m\,g\,z - \frac{mg}{R}z^2 + \ldots$$

schreiben lässt. Setzen Sie dazu $\frac{z}{R} = x$ und berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Drücken Sie die Konstanten K und g durch M, G und R aus.

b) [2 Punkte] Der Radius der Erde R beträgt 6378 km. Welcher Wert für g ergibt sich bei einer Erdmasse $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg und einer Gravitationskonstanten $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^3 / kg s^2? Warum können der Term $\frac{m\,g}{R}z^2$ und alle höheren Terme im Potential für Abstände bis zu 1 km oberhalb der Erdoberfläche „in guter Näherung“ vernachlässigt werden?

c) [1 Punkt] Welche Gravitationskraft (in z-Richtung) ergibt sich aus dem Potential $V(z) = m\,K + m\,g\,z$?

Aufgabe 55: Eindimensionale Bewegung (7 Bonuspunkte)

Ein Teilchen mit der Masse $m = 100$ g bewegt sich in x-Richtung. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Teilchen an der Stelle $x_0 = 1$ m und hat die Geschwindigkeit $v_0 = 0{,}5$ m/s .

a) [4 Punkte] Auf das Teilchen wirke die konstante Kraft $F_a = 2\,N$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie $v(t)$ und $x(t)$. An welchem Ort x ist das Teilchen zur Zeit $t = 10$ s?

b) [3 Punkte] Auf das Teilchen wirke jetzt zusätzlich zur konstanten Kraft noch die zeitabhängigen Kraft $F_b(t) = F_0 \sin(\omega t)$ mit $F_0 = 1\,N$ und $\omega = 0{,}1/\mathrm{s}$. Stellen Sie erneut die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie für die obigen Anfangsbedingungen die Geschwindikeit $v(t)$ und den Ort $x(t)$. An welcher Stelle x befindet sich das Teilchen zur Zeit $t = 10$ s?

Aufgabe 56: Pioneer 10 und das Swing-by-Manöver am Jupiter (22 Bonuspunkte)

Für Pioneer 10 begann die Reise am 03. März 1972. Eine Atlas-Centaur-Rakete brachte die Sonde auf eine Bahn tangential zur Umlaufbahn der Erde um die Sonne, wobei die Sonde der Erde (außerhalb deren Gravitationsfeld) mit einer Geschwindigkeit von $\Delta v = 9{,}3$ km/s vorauseilte.

Aufgrund des limitierten Startgewichts bewegte sich die Sonde von nun an ohne Antrieb nur unter dem Einfluss der Gravitationskraft. Erstes Ziel für Pioneer 10 war Jupiter. Die Gestalt der anfänglichen Flugbahn ist in der Abbildung 1 gezeigt. Im Prinzip handelt es sich um eine Hohmann-Übergangsbahn, nur dass der Jupiter nicht im Aphel, sondern bereits früher erreicht wird.

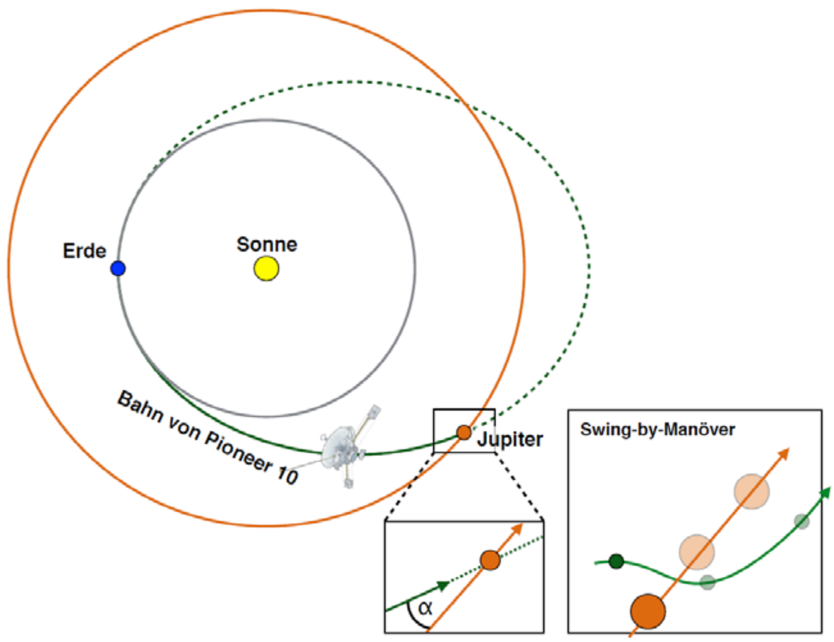


Abbildung 1

Abstandsangaben werden im Folgenden in *Astronomische Einheiten* (mittlerer Abstand Erde-Sonne): 1 AE $= 149{,}6 \cdot 10^6 \cdot 10^6$ km angegeben. Verwenden Sie weiterhin $M_{\text{Sonne}} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $M_{\text{Jupiter}} = 1{,}9 \cdot 10^{27}$ kg und $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$.

a) [2 Punkte] In welche Entfernung von der Sonne hätte Pioneer 10 ohne den Swing-by am Jupiter vordringen können? Geben Sie Ihr Ergebnis in AE an.

b) [2 Punkte] Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit von Jupiter (die Bahn soll als kreisförmig angenommen werden)?

Für die weiteren Berechnung ist die Geschwindigkeit relevant, mit der die Sonde in Jupiternähe eintrifft, bevor dessen Gravitation einen nennenswerten Einfluss ausübt. Da es keinen wohldefinierten „Rand des Gravitationseinflusses“ von Jupiter (Abstand zur Sonne: 5,05 AE) gibt, legen wir relativ willkürlich einen Sonnenabstand von 4,85 AE fest.

c) [2 Punkte] Berechen Sie die Ankunftsgeschwindigkeit der Sonde an Jupiter (Sonnenabstand: 4,85 AE).

Hinweis: Leiten Sie hierfür zunächst eine allgemeine Beziehung zwischen der Bahngeschwindigkeit v, dem Betrag des Radiusvektor r und der großen Halbachse a aus den in der Vorlesung bzw. Übung (Aufgabe 34 a)) behandelten allgemeinen Formeln für die Gesamtenergie und große Halbachse a

$$E = \frac{1}{2} m\, v^2 - \frac{m\, G\, M}{r} \,, \qquad a = \frac{m\, G\, M}{2\, E}$$

bei Kepler-Bahnen her. Nutzen Sie anschließend aus, dass die Werte für r und v beim Start bekannt sind.

d) [2 Punkte] Berechnen Sie nun den Winkel α (siehe Abbildung 1), unter dem sich Pioneer 10 Jupiter nähert.

Hinweis: Nutzen Sie hierfür die Drehimpulserhaltung auf der Flugbahn der Sonde und wie oben die bekannten Startbedingungen aus.

e) [2 Punkte] Transformieren Sie nun den Geschwindigkeitsvektor von Pioneer 10 ins Ruhesystem von Jupiter, wobei die x-Achse parallel zum Geschwindigkeitsvektor von Jupiter zeigen soll, und berechnen Sie den Betrag der transformierten Geschwindigkeit v'.

Im Folgenden soll sich die Sonde nur unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes von Jupiter bewegen, wobei in guter Näherung angenommen werden kann, dass sich der Planet während des gesamten Swing-by-Manövers auf einer geradlinigen Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt. Da die Sonde für Jupiter aus dem Unendlichen kommt, beschreibt diese im Ruhesystem des Jupiters eine Hyperbel, wobei die asymptotische Bahngeschwindigkeit (Geschwindigkeit im Unendlichen) in guter Näherung durch v' gegeben ist. Der Abstand größter Annäherung, der durch $d_{\text{min}} = e - a$ mit $e = \epsilon \cdot a$ (siehe Aufgabe 34 a)) gegeben ist, soll $d_{\text{min}} = 200.000$ km betragen.

f) [2 Punkte] Berechnen Sie die Gesamtenergie der Sonde im Ruhesystem von Jupiter und anschließend den Parameter ϵ der Hyperbel.

Hinweis: Benutzen Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 34 a).

g) [2 Punkte] Verwenden Sie die allgemeine Gleichung für Kepler-Bahnen

$$r\,(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon\, \cos{(\varphi)}} \,,$$

um den Drehwinkel der Sonde δ (siehe Abbildung 2) zu berechnen.

Hinweis: Für welchen Winkel wird $r\,(\varphi)$ unendlich?

h) [2 Punkte] Berechnen Sie anschließend den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}\,''$ im Unendlichen auf dem auslaufenden asymptotischen Ast der Hyperbel.

Hinweis: Benutzen Sie die Drehmatrix aus der Vorlesung (Kap. 3.1).

i) [2 Punkte] Transformieren Sie nun den Geschwindigkeitsvektor zurück in das Ruhesystem der Sonne und berechnen Sie dessen Betrag v''' sowie den Winkel α relativ zur Bahn von Jupiter. Woher kommt die zusätzliche Energie von Pioneer 10?

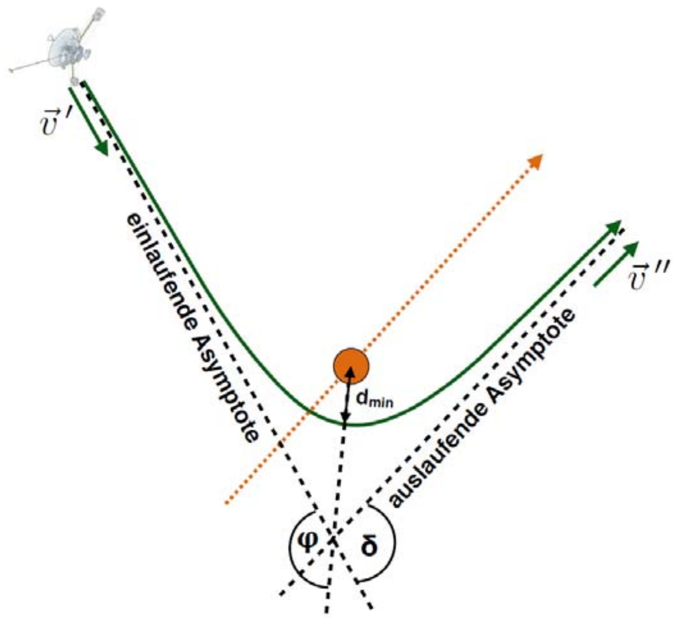


Abbildung 2

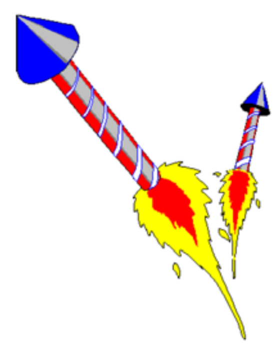
j) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass bei gegebener asymptotischer Bahngeschwindigkeit v' vor dem Swing-by, die Geschwindigkeit der Sonde v''' (Geschwindigkeit im Ruhesystem der Sonne) nach dem Swing-by maximal wird, wenn der Winkel zur Jupiterbahn unmittelbar nach dem Manöver $\alpha = 0°$ beträgt, sie sich also zunächst parallel zu Jupiter bewegt.

Anschließend bewegt sich Pioneer 10 wieder alleine im Gravitationspotential der Sonne.

k) [1 Punkt] Reicht die Geschwindigkeit, um das Sonnensystem zu verlassen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Benutzen Sie hierfür die (angepassten!) Ergebnisse aus Aufgabe 44 d).

l) [1 Punkt] Um welche Art von Bahn handelt es sich? Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den weiteren Bahnverlauf.



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!