

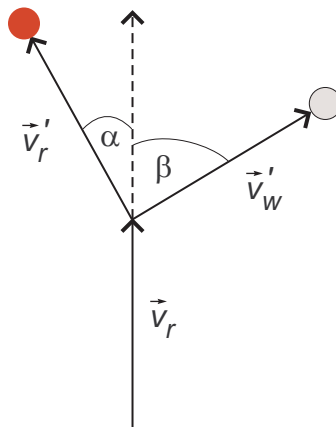
Aufgabe 57: Elastischer Stoß

(mündlich, 7 Punkte)

Sie beobachten beim Billardspiel den Stoß einer roten Kugel mit einer zunächst ruhenden weißen Kugel. Die rote Kugel wird durch die Kollision um einen Winkel von $\alpha = 29^\circ$ gegenüber ihrer ursprünglichen Bewegungsrichtung abgelenkt. Die weiße Kugel bewegt sich nach dem Stoß in eine Richtung, die mit der ursprünglichen Bewegungsrichtung der roten Kugel einen Winkel von $\beta = 59^\circ$ bildet.

- [5 Punkte] Verwenden Sie den Impulssatz und den Energiesatz, um das Massenverhältnis der beiden Kugeln zu bestimmen.
- [2 Punkte] Berechnen Sie die Winkelsumme $\alpha + \beta$ im Fall von zwei gleichschweren Kugeln.

Nehmen Sie in allen Fällen an, dass kein Energieverlust bei den Stößen auftritt.



Aufgabe 58: Trägheitsmomente

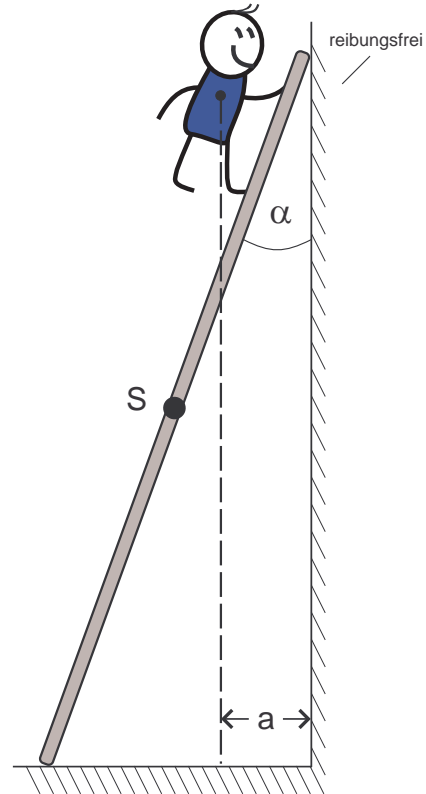
(mündlich, 7 Punkte)

- [3 Punkte] Gegeben sei ein Vollzylinder mit Radius R und Länge L . Berechnen Sie das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch den Mittelpunkt des Zylinders geht und senkrecht auf der Längsachse steht. Die Massendichte sei konstant. Geben Sie das Trägheitsmoment in Abhängigkeit von M , R und L an.
- Gegeben sei eine Hohlkugel mit dem Außenradius R_a und dem Innenradius R_i . Die Massendichte sei konstant $\rho = M/V$ im Volumen V , das durch $R_a \geq r \geq R_i$ bestimmt ist.
 - [3 Punkte] Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel in Abhängigkeit von der Masse M und den Radien R_a und R_i .
 - [1 Punkt] Betrachten Sie jetzt den Fall einer Kugelschale, d. h. $R_i = R_a - d$ mit $d \ll R_a$. Berechnen Sie für Ihr Ergebnis aus i) das Taylor-Polynom vom Grad 1 bezüglich der Variablen d an der Stelle $d = 0$, um das Trägheitsmoment näherungsweise darzustellen.

Aufgabe 59: Leiter

(mündlich, 6 Punkte)

Eine Leiter der Länge $L = 5$ m und der Masse $m = 40$ kg lehnt unter einem Winkel $\alpha = 20^\circ$ (siehe Abbildung) an einer glatten Wand. Der Schwerpunkt der Leiter befindet sich in ihrem Mittelpunkt. Zwischen dem Boden und dem unteren Ende der Leiter besteht Haftreibung mit einem Haftreibungskoeffizienten $\mu = 0,2$. Eine Person mit der Masse $M = 80$ kg klettert die Leiter hinauf. Welchen Abstand a von der Wand darf der Schwerpunkt der Person nicht unterschreiten, damit die Leiter nicht ins Rutschen kommt?



Aufgabe 60: Mehrfache Integrale und Schwerpunkt

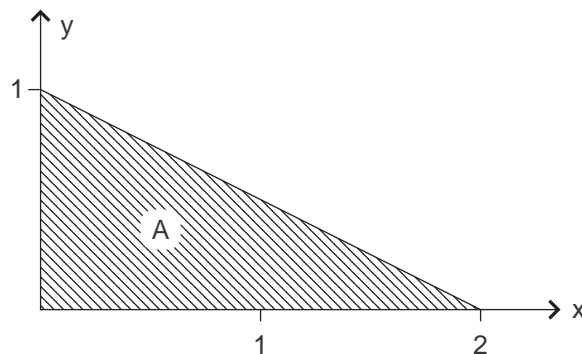
(schriftlich, 13 Punkte)

- a) [3 Punkte] Berechnen Sie für die durch das Quadrat $1 \leq x \leq 2$ und $1 \leq y \leq 2$ gegebene Fläche A die Integrale

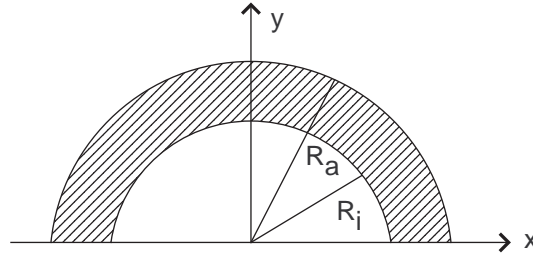
$$I_1 = \int_A dx dy \quad \text{und} \quad I_2 = \int_A \frac{1}{x+y} dx dy .$$

- b) [3 Punkte] Berechnen Sie für die in der folgenden Skizze gegebene Fläche A die Integrale

$$I_3 = \int_A dx dy \quad \text{und} \quad I_4 = \int_A (x^2 + y^2) dx dy .$$



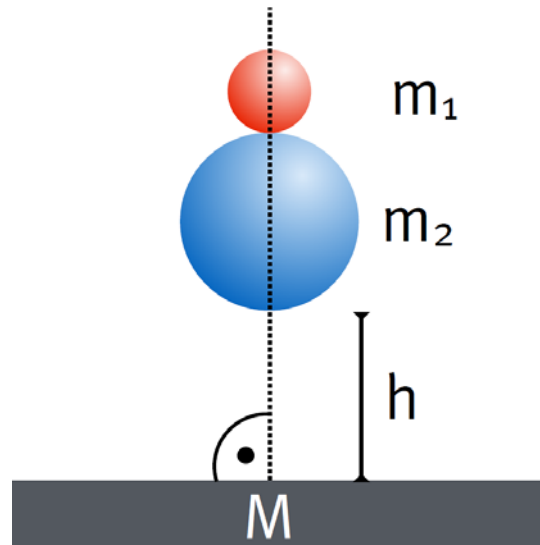
- c) [7 Punkte] Berechnen Sie den Schwerpunkt eines halben Kreisrings mit Außenradius R_a , Innenradius R_i und Dicke d . In z -Richtung erstreckt sich der Ring von $-d/2$ bis $d/2$. Die Massendichte sei konstant. Geben Sie den berechneten Schwerpunkt in kartesischen Koordinaten an. Die Durchführung der Volumenintegration kann zweckmäßigerweise in Zylinderkoordinaten erfolgen.



Aufgabe 61: Astroblaster

(schriftlich, 7 Punkte)

Wie in der Vorlesung vor Weihnachten vorgeführt, lassen Sie 2 aufeinander gestapelte Flummis (in der Vorlesung waren es 4 Bälle) mit den Massen m_1 und m_2 aus einer Höhe h unter dem Einfluss der Gravitationskraft auf den Boden fallen (siehe Abbildung). Die Bälle sind nicht miteinander verbunden (der Stab in der Vorlesung diente nur zur Sicherstellung eines zentralen Stoßes) und bewegen sich zunächst unbeeinflusst voneinander. Im Folgenden sollen alle Stöße als zentral und elastisch angenommen werden. Für die Masse des Bodens gilt $M \gg \dots \gg m_1, m_2$.



Hinweis: Es handelt sich um eine lineare Bewegung, bei der aber das Vorzeichen der Geschwindigkeiten und Impulse konsistent berücksichtigt werden muss! Nutzen Sie für Ihre Berechnungen die entsprechenden Formeln aus der Vorlesung.

- a) [1 Punkt] Betrachten Sie zunächst nur m_2 und berechnen Sie dessen Geschwindigkeit v'_2 nach dem Stoß mit dem Boden relativ zu dessen Geschwindigkeit v_2 unmittelbar davor.
- b) [3 Punkte] Jetzt kollidiert m_1 mit m_2 . Welche Geschwindigkeit v'_1 besitzt m_1 nach dem Stoß mit m_2 ? Drücken Sie ihr Ergebnis in Abhängigkeit von m_1 , m_2 und v_1 (Geschwindigkeit von m_1 vor dem Stoß) aus.

Hinweis: Transformieren Sie die Bewegung zunächst in das Ruhesystem von m_2 und anschließend wieder zurück.

- c) [2 Punkte] Für welches Massenverhältnis m_1/m_2 wird v'_1 maximal und wie groß ist der Faktor zwischen v'_1 und v_1 in diesem Fall?
- d) [1 Punkt] Wie hoch springt m_1 somit maximal bei gegebenem h ?