Aufgabe 67: Euler'sche Gleichungen (mündlich, 11 Punkte)

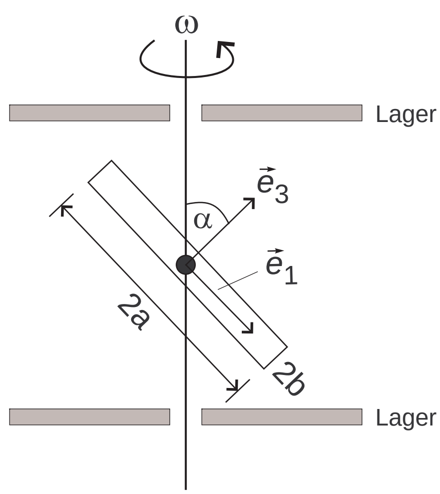
Eine quadratische Platte mit Kantenlänge $2\,a$ und Dicke $2\,b$ dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine durch den Mittelpunkt laufende Achse. Die Platte ist gegenüber der Drehachse um die Winkel α gekippt (siehe Abbildung).

a) [4 Punkte] Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor im körperfesten System die folgende Form hat:

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} \frac{m}{3}(a^2 + b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{3}(a^2 + b^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{3}\,2\,a^2 \end{pmatrix} .$$

b) [3 Punkte] Verwenden Sie die Euler'schen Gleichungen, um das Drehmoment der Platte im körperfesten Koordinatensystem zu bestimmen.

c) [4 Punkte] Welche Kräfte wirken auf die Lager der Drehachse, wenn der Abstand des Scheibenmittelpunktes zu beiden Lagern gleich d ist?



Aufgabe 68: Komplexe Zahlen (mündlich, 9 Punkte)

a) [2 Punkte] Bilden Sie für die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4\,i$ und $z_2 = 12 + 5\,i$ die Summe $z_1 + z_2$, die Differenz $z_1 - z_2$, das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten z_1/z_2 (*Hinweis:* Erweitern Sie dazu mit z_2^*.)

b) [3 Punkte] Bestimmen Sie den Betrag, die Phase φ, sowie den Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = -i\,, \quad z_2 = 3 + 4\,i\,, \quad z_3 = (1+i)^3\,, \quad z_4 = \frac{1+i}{1-i}\,, \quad z_5 = e^{-i\,\frac{\pi}{4}}\,, \quad z_6 = -e^{i\,\pi}$$

und stellen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene ($\widehat{=}$ Gauß'sche Zahlenebene) dar.

c) [2 Punkte] Leiten Sie die Moivre-Formel

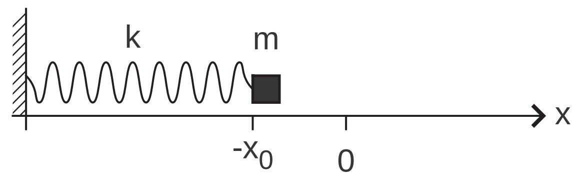
$$z^n = |z|^n (\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

mit Hilfe der Euler-Formel $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ ab.

d) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $\cos(i\varphi) = \cosh(\varphi)$ und $\sin(i\varphi) = i\sinh\varphi$ gilt.

Aufgabe 69: Harmonischer Oszillator (schriftlich, 7 Punkte)

Gegeben sei eine Masse m, die unter dem Einfluss einer Federkraft $F = -k\,x$ reibungsfrei schwingt.



a) [3 Punkte] Geben Sie die Bewegungsgleichung an. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass diese durch

$$x(t) = C_1\,\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\,\mathrm{e}^{-i\omega t}$$

gelöst wird. Zeigen Sie, dass folgende drei Funktionen äquivalent zu $x(t)$ sind:

$$x(t) = \tilde{C}_1 \cos(\omega t) + \tilde{C}_2 \sin(\omega t)$$
$$x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \phi)$$
$$x(t) = B\cdot\sin(\omega t + \theta)$$

Wie hängen C_1 und C_2 mit den jeweiligen ($\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, bzw. A, ϕ, bzw. B, θ) Konstanten zusammen? Drücken Sie dazu Cosinus und Sinus durch komplexe Exponentialfunktionen aus.

b) [2 Punkte] Bestimmen Sie die jeweiligen Konstanten der vier oben genannten Darstellungen für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \omega\cdot x_0$.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die kinetische und die potentielle Energie als Funktion der Zeit für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$. Benutzen Sie dazu irgendeine der oben angegebenen Lösungsfunktionen. Wählen Sie dabei die Konstante in der potentiellen Energie derart, dass $V(x=0) = 0$ ist. Wie groß ist die Gesamtenergie E?

Aufgabe 70: Harmonischer Oszillator mit Gleitreibung (schriftlich, 7 Punkte)

Eine Masse m bewege sich unter dem Einfluss einer Federkraft $F_{\text{Feder}} = -k\,x$ und der Gleitreibungskraft F_{Gl}. Diese hat die Form

$$F_{\text{Gl}} = \begin{cases} -\mu\,m\,g & \text{für} \quad v > 0 \\ 0 & \text{für} \quad v = 0 \\ \mu\,m\,g & \text{für} \quad v < 0 \end{cases}$$

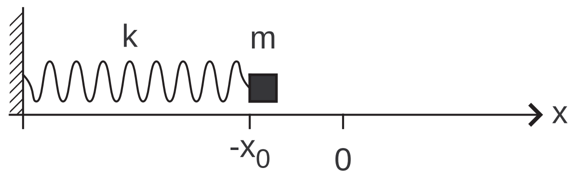
mit dem konstanten Gleitreibungskoeffizienten μ.

a) [3 Punkte] Zur Zeit $t = 0$ befindet sich die Masse bei $x(0) = -x_0$ (mit $x_0 > 0$) und habe die Geschwindigkeit $v(0) = \dot{x}(0) = 0$. Dabei sei $x_0 > 4\,\frac{\mu g}{\omega^2}$. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und berechnen Sie $x(t)$ für $0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}$. Wie weit ist die Masse zur Zeit $t = \frac{\pi}{\omega}$ ausgelenkt?

b) [2 Punkte] Berechnen Sie $x(t)$ für $\frac{\pi}{\omega} \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$. Wie groß ist am Ende dieser Zeitspanne die Auslenkung?

c) [1 Punkt] Skizzieren Sie $x(t)$ für $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$.

d) [1 Punkt] Wann endet die Bewegung? Welche Rolle spielt dabei die Haftreibung $F_\mathrm{H} = -\mu_\mathrm{H}\, m\, g$ mit $\mu_\mathrm{H} > \mu$?



Aufgabe 71: Stabpendel (schriftlich, 6 Punkte)

Ein dünner Stab der Länge L und der Masse m wird im Abstand a vom Schwerpunkt an einer Achse aufgehängt und führt unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen aus. Die entsprechende Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen lautet

$$\ddot{\varphi} = -\frac{a\, m\, g}{J}\, \varphi \; .$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich der Drehachse. Das Trägheitsmoment des Stabes bezüglich des Schwerpunktes beträgt $J_s = \frac{m}{12} L^2$.

a) [2 Punkte] Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz ω dieses Pendels. Skizzieren Sie ω in Abhängigkeit vom Abstand a.

b) [2 Punkte] Welcher Wert für ω ergibt sich beim Abstand $a = \frac{L}{2}$? In welchem anderen Abstand $\tilde{a}$ der Drehachse vom Schwerpunkt ergibt sich die gleiche Schwingungsfrequenz? Wie lang müsste ein Fadenpendel mit der gleichen Masse m sein, um ebenfalls diese Schwingungsfrequenz zu haben?

c) [2 Punkte] Für welchen Abstand a wird die Schwingungsfrequenz ω maximal? Berechnen Sie die zugehörige Dauer einer Schwingungsperiode für einen Stab der Länge $L = 1$ m.