Aufgabe 11: Zerlegung von Vektoren (schriftlich, 6 Punkte)

a) [3 Punkte] Häufig ist es bei Anwendungen günstig, einen Vektor $\vec{a}$ nach orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ zu zerlegen, die *nicht* mit den kartesischen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

übereinstimmen. Betrachten Sie hier

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich in folgender Form schreiben:

$$\vec{a} = a_x \, \vec{e}_x + a_y \, \vec{e}_y + a_z \, \vec{e}_z = a_1 \, \vec{e}_1 + a_2 \, \vec{e}_2 + a_3 \, \vec{e}_3 .$$

Bestimmen Sie die Komponenten a_x, a_y, a_z, a_1, a_2 und a_3.

b) [3 Punkte] Zerlegen Sie den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in Anteile $\vec{b}_\parallel$ und $\vec{b}_\perp$, die parallel bzw. senkrecht zum Vektor $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind.

Aufgabe 12: Bahnkurve I: Helix (schriftlich, 8 Punkte)

Die Bahnkurve eines Teilchens sei durch

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\omega\, t) \\ R \cdot \sin(\omega\, t) \\ v_0\, t \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei sind R, ω und v_0 Konstanten.

a) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Bahnkurve für $0 \leq t \leq \frac{4\,\pi}{\omega}$.

b) [2 Punkte] Berechnen Sie

$$|\vec{r}\,(t)| , \qquad \vec{v} = \frac{d}{d\,t}\,\vec{r}\,(t) , \qquad |\vec{v}\,(t)| , \qquad \vec{a}\,(t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\,\vec{r}\,(t) \qquad \text{und} \qquad |\vec{a}\,(t)| .$$

c) [1 Punkt] Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Teilchen von $t_1 = 0$ bis $t_2 = \dfrac{4\pi}{\omega}$ zurücklegt.

d) [2 Punkte] Geben Sie die Zeit als Funktion $t(s)$ der Bahnkurvenlänge s an, die das Teilchen von $t_1 = 0$ bis $t_2 = t$ zurückgelegt hat und geben Sie die Bahnkurve $\vec{r}(s)$ als Funktion von s an.

e) [2 Punkte] Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_T$ und den Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_N$.

Hinweis: Verwenden Sie die Abkürzung $b = \sqrt{R^2\,\omega^2 + v_0^2}$.

Aufgabe 13: Erlebnisse auf Zugreisen **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) [2 Punkte] Zwei Züge fahren mit je 30 km/h auf einer geraden Strecke aufeinander zu. Ein Vogel startet von der Spitze des einen Zuges, als die beiden Züge 60 km voneinander entfernt sind, und fliegt direkt mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h auf den anderen Zug zu. Als er diesen erreicht, dreht er instantan um und fliegt zurück zum ersten Zug, und so weiter (wir haben keine Ahnung, warum er das tun sollte). Berechnen Sie die gesamte Distanz, die der Vogel zurücklegt, bevor die beiden Züge sich gegenseitig passieren.

b) [4 Punkte] Ein Zug fährt mit 30 m/s bei Regen direkt nach Süden. Die Regentropfen werden vom Wind ebenfalls direkt nach Süden geblasen, wobei der (gerade) Pfad jedes Regentropfens für einen stationären Beobachter am Boden einen Winkel von 70° relativ zur Vertikalen einnimmt. Ein Reisender im Zug hingegen sieht die Tropfen als perfekt senkrecht fallend. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Regentropfen für den stationären Beobachter.