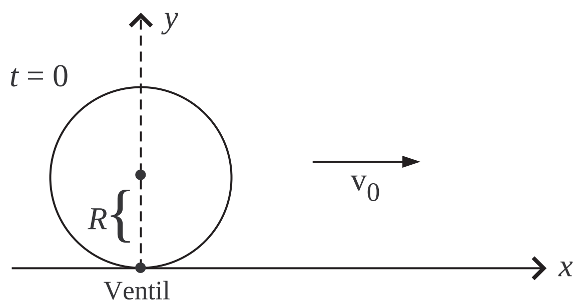
Aufgabe 14: Bahnkurve II: Zykloide (mündlich, 10 Punkte)

Ein Radfahrer befährt eine gerade Strecke mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = \omega \cdot R$. Die Bahnkurve des Ventils, das sich an einem Fahrradreifen im Abstand R von der Achse befindet, lautet:

$$\vec{r}\,(t) = \begin{pmatrix} \omega\, R\, t - R\, \sin(\omega\, t) \\ R - R\, \cos(\omega\, t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$



a) [2 Punkte] Berechnen Sie $\vec{r}\,(t)$ für

$$t = 0\ , \qquad t = \frac{\pi}{2\,\omega}\ , \qquad t = \frac{\pi}{\omega}\ , \qquad t = \frac{3\,\pi}{2\,\omega} \qquad \text{und} \qquad t = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

und skizzieren Sie $x\,(t)$, $y\,(t)$ und die Bahnkurve in der x-y-Ebene für $0 \le t \le \frac{2\,\pi}{\omega}$.

b) [6 Punkte] Berechnen Sie

$$|\vec{r}\,(t)|\ , \quad \frac{d}{d\,t}\,|\vec{r}\,(t)|\ , \quad \vec{v}\,(t) = \frac{d}{d\,t}\,\vec{r}\,(t)\ , \quad |\vec{v}\,(t)|\ , \quad \frac{d}{d\,t}\,|\vec{v}\,(t)|\ , \quad \vec{a}\,(t) = \frac{d^2}{d\,t^2}\,\vec{r}\,(t) \quad \text{und} \quad |\vec{a}\,(t)|\ .$$

Welche physikalischen Bedeutungen haben diese Größen?

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die Länge des Weges, den das Ventil von $t_1 = 0$ bis $t_2 = \frac{2\,\pi}{\omega}$ zurücklegt.

Aufgabe 15: Partielle Ableitungen (mündlich, 5 Punkte)

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen (mit $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial\, x}$, $\frac{\partial}{\partial\, y}$ und $\frac{\partial}{\partial\, z}$:

a) [1 Punkt] $f\,(r) = \frac{1}{r}$

b) [1 Punkt] $f\,(r) = r^2$

c) [1 Punkt] $f\,(r) = \frac{1}{r} \cdot e^{-\alpha\, r}$

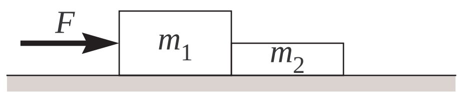
d) [1 Punkt] $f\,(x,\, y) = \ln\left(a\, x^2 + b\, y^2\right)$

e) [1 Punkt] $f\,(x,\, y,\, z) = \frac{y\, z}{\sqrt{c + x^2}}$

Dabei sind α, a, b und c Konstanten.

Aufgabe 16: **Blöcke auf Eisfläche** **(mündlich, 5 Punkte)**

Zwei Blöcke m_1 und m_2 berühren sich auf einer horizontalen Eisfläche. Eine ebenfalls horizontale Kraft wirkt von links auf den ersten Block (siehe Skizze). Sei $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 1$ kg und $F = 3$ N. Berechnen Sie die Kraft, die von Block 1 auf Block 2 ausgeübt wird. Reibungskräfte seien zu vernachlässigen.



Aufgabe 17: **Polarkoordinaten** **(schriftlich, 8 Punkte)**

In der Vorlesung haben Sie die ebenen Polarkoordinaten $x = \rho \cdot \cos\varphi = r\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi = r\sin\varphi$ mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

kennengelernt. (Die Notation bezüglich der radialen Komponente $\rho = r$ ist in der Literatur nicht einheitlich.)

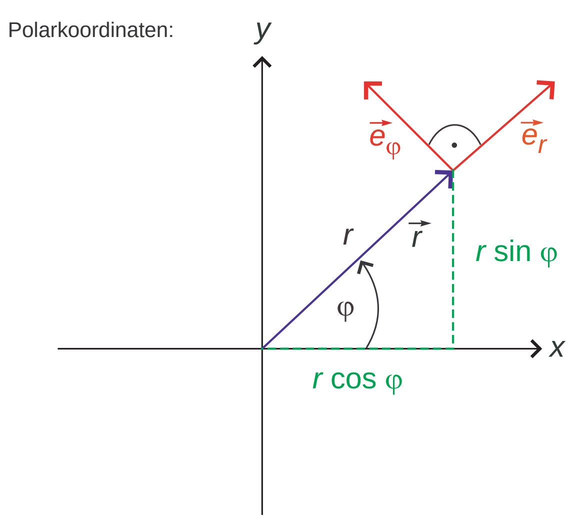
a) [1 Punkt] Ein Punkt habe die kartesischen Koordinaten $x = -3\,R$ und $y = 2\,R$, wobei R eine Konstante ist. Geben Sie die zugehörigen Polarkoordinaten an.

b) [1 Punkt] Bei der Beschreibung von Bewegungen mit $r = r(t)$ und $\varphi = \varphi(t)$ ist zu beachten, dass sich die Einheitsvektoren zeitlich ändern. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\vec{e}_r$ und $\frac{d}{dt}\vec{e}_\varphi$. Stellen Sie die resultierenden Vektoren mit Hilfe von $\vec{e}_r$ bzw. $\vec{e}_\varphi$ dar.

c) [1 Punkt] Verifizieren Sie, dass für $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ die Geschwindigkeit die Form $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ hat. Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ in Polarkoordinaten.

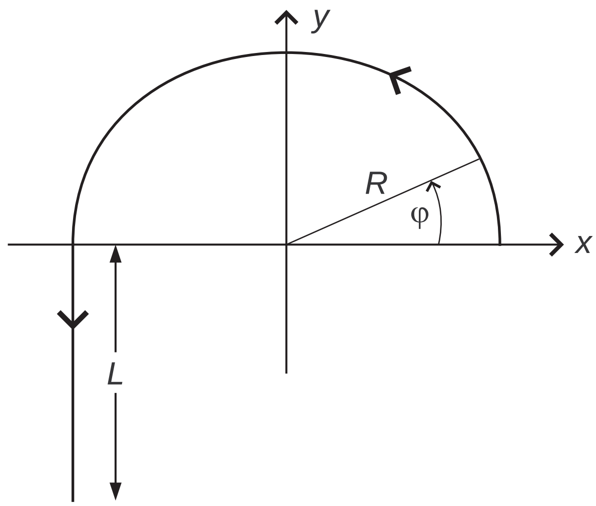
d) [1 Punkt] Ein Teilchen bewege sich auf einer Bahnkurve mit $r = v_0\,t$ und $\varphi = \omega\,t$, wobei v_0 und ω konstant sind. Berechnen Sie $\vec{v}$ und $\vec{a}$ in Polarkoordinaten und bestimmen Sie $|\vec{v}\,|$ und $|\vec{a}\,|$.

e) [4 Punkte] Stellen Sie $\vec{r}(t)$ für die Bewegung aus d) in kartesischen Koordinaten dar und berechnen Sie $\vec{v}$, $|\vec{v}\,|$, $\vec{a}$ und $|\vec{a}\,|$. Skizzieren Sie die Bahnkurve.



Aufgabe 18: **Bewegung auf Halbkreis** **(schriftlich, 6 Punkte)**

Ein Eisenbahnzug befährt mit konstanter Geschwindigkeit $|\vec{v}| = v_0$ eine Strecke, die aus einem Halbkreis mit Radius R und einer Geraden der Länge L besteht. Der Zug befinde sich zur Zeit $t = 0$ bei $\vec{r} = (R, 0)$, zur Zeit t_1 bei $\vec{r} = (-R, 0)$ und zur Zeit t_2 bei $\vec{r} = (-R, -L)$.



1) [4 Punkte] Parametrisieren Sie die Bahnkurve, d. h. geben Sie $\vec{r}\,(t)$ für $0 \leq t \leq t_1$ und $t_1 \leq t \leq t_2$ an. Bestimmen Sie t_1 und t_2 für $v_0 = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $R = 1\,\mathrm{km}$ und $L = 2\,\mathrm{km}$.

2) [2 Punkte] Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}\,(t)$.

Aufgabe 19: **Kinematik in zwei Dimensionen – waagerechter Wurf** **(schriftlich, 6 Punkte)**

Ein Rettungsflugzeug soll Vorräte zu abgeschnittenen Bergsteigern abwerfen, die sich auf einem Felsgrad 200 m unter der Flughöhe befinden.

a) [2 Punkte] Wie weit vor den Empfängern der Fracht müssen die Vorräte abgeworfen werden, wenn das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h auf konstanter Höhe fliegt?

b) [2 Punkte] Angenommen, das Flugzeug wirft die Vorratsgüter in einer horizontalen Entfernung von 400 m vor den Bergsteigern ab. Wie groß muss die vertikale Geschwindigkeit der Güter beim Verlassen des Flugzeugs sein, damit sie genau an der Position der Bergsteiger landen?

c) [2 Punkte] Welche Geschwindigkeit haben die Güter beim Aufprall im Falle von b)?

Hinweis: Zur Bearbeitung der Aufgabe ist eine Skizze des Bewegungsablaufs hilfreich.