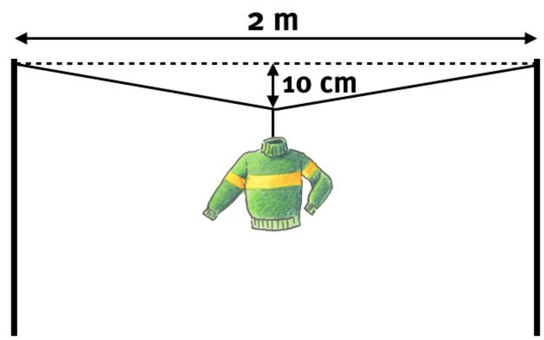
Aufgabe 20: Kräfte bei Wäscheleine (mündlich, 6 Punkte)

An einer Wäscheleine hängt mittig ein tropfnasser, 2 kg schwerer Pullover (siehe Abbildung).



a) [1 Punkt] Zeichnen Sie in die Abbildung alle relevanten Kräfte ein.

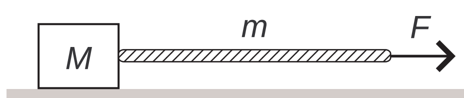
b) [3 Punkte] Berechnen Sie die Kraft, mit der die Wäscheleine gespannt wird.

c) [2 Punkte] Berechnen Sie die horizontale Kraft, mit der die beiden Aufhängepunkte nach innen gezogen werden.

Aufgabe 21: Seilkraft (mündlich, 4 Punkte)

a) [3 Punkte] Ein Seil mit Masse m ist an einem Block mit Masse M, der sich auf einer Eisfläche befindet, befestigt. An dem freien Ende des Seils wird mit einer Kraft F gezogen. Welche Kraft übt das Seil auf den Block aus. Reibungskräfte seien zu vernachlässigen.

b) [1 Punkt] Wie groß wäre die Kraft, wenn das Seil masselos wäre?



Aufgabe 22: Atwood'sche Fallmaschine (mündlich, 10 Punkte)

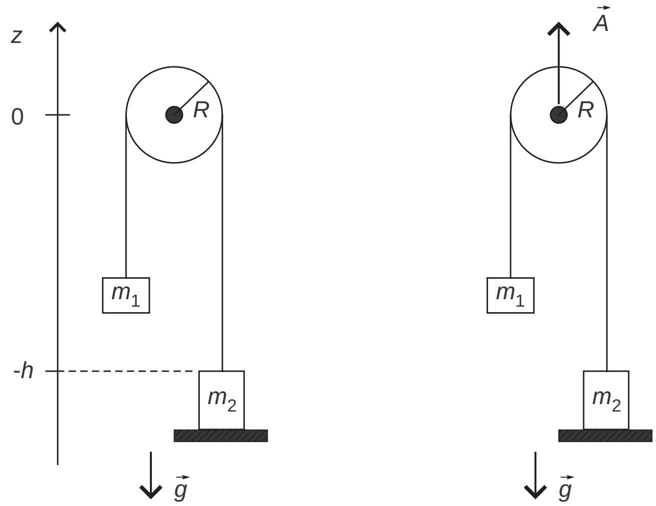
Zwei Massen m_1 und m_2 ($m_2 > m_1$) sind mit einem Seil der Länge l, welches reibungsfrei über eine Rolle mit Radius R geführt wird, fest miteinander verbunden. Die Anordnung befinde sich im Schwerefeld der Erde, wobei die Masse m_2 durch eine Arretierung in der Höhe $-h$ festgehalten wird. Zur Zeit $t = 0$ wird die Arretierung gelöst. Das Seil werde als masselos angesehen.

a) [2 Punkte] Welche Kräfte wirken jetzt auf die Massen m_1 und m_2? Zeichnen Sie diese in die Grafik ein.

b) [4 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für m_1 und m_2 auf. Entkoppeln Sie die über die Seilkraft verknüpften Gleichungen. Lösen Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen.

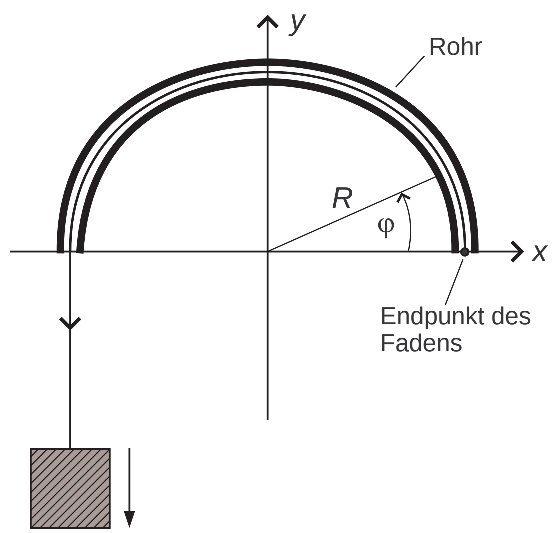
c) [2 Punkte] Welche Masse tritt als „träge" Masse und welche als „schwere" Masse in Erscheinung?

d) [2 Punkte] Wie ändern sich die Bewegungsgleichungen, wenn die Aufhängung der Rolle zusätzlich in z-Richtung mit $\vec{A} = A \cdot \vec{e}_z$ beschleunigt wird?



Aufgabe 23: Bewegung auf Halbkreis II **(schriftlich, 8 Punkte)**

Eine Masse zieht einen dünnen Faden, der durch ein halbkreisförmiges Rohr geführt wird, hinter sich her. Zur Zeit $t_0 = 0$ ruhe die Masse und der Endpunkt des Fadens befinde sich am Anfang des Rohres bei $\vec{r} = (R, 0)$. Dann fällt die Masse mit konstanter Beschleunigung g im Schwerefeld der Erde. Zur Zeit t_1 verlässt der Endpunkt des Fadens das Rohr. Bestimmen Sie dessen Bahnkurve $\vec{r}(t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ für $0 \leq t \leq t_1$. Berechnen Sie t_1 für $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ und $R = 20\,\mathrm{cm}$.



Aufgabe 24: Kugelkoordinaten **(schriftlich, 7 Punkte)**

In kartesischen Komponenten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$, ausgedrückt durch die Kugelkoordinaten r, θ, φ,

$$\vec{r}(r, \theta, \varphi) = r\,(\cos\varphi\,\sin\theta,\, \sin\varphi\,\sin\theta,\, \cos\theta)\ .$$

Hält man jeweils zwei der Kugelkoordinaten fest, so erhält man die Koordinatenlinie der dritten Koordinate als parametrisierte Kurve mit der jeweils dritten Koordinate als Parameter, z. B. für die r-Koordinatenlinien

$$\vec{r}(r) = \vec{r}(r, \theta = \mathrm{const}, \varphi = \mathrm{const})\ .$$

An jedem Punkt $\vec{r}$ gibt es nun drei Koordinatenrichtungen $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, die durch die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien gegeben sind.

a) [2 Punkte] Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ und $\vec{e}_\varphi$.

b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Orthonormalsystem bilden.

c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Rechtssystem bilden.

d) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass sich in den Kugelkoordinaten, in denen der Ortsvektor als $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ geschrieben werden kann, die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\varphi}\,\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

und die Beschleunigung als

$$\begin{aligned} \vec{a} = \frac{d^2\,\vec{r}}{d\,t^2} &= \left[\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta\right]\vec{e}_r \\ &+ \left[r\,\ddot{\varphi}\,\sin\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\varphi}\,\sin\theta + 2\,r\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\,\cos\theta\right]\vec{e}_\varphi \\ &+ \left[r\,\ddot{\theta} - r\,\dot{\varphi}^2\,\sin\theta\,\cos\theta + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta \end{aligned}$$

darstellen lassen.

Aufgabe 25: Potentiale und Kraftfelder **(schriftlich, 5 Punkte)**

a) Berechnen Sie für die folgenden Potentiale $V(\vec{r})$ die zugehörigen Kraftfelder $\vec{F}(\vec{r})$.

1) [1 Punkt] $\quad V(\vec{r}) = \frac{1}{2}\,k\,x^2 + \frac{1}{2}\,k\,y^2\,,$

2) [1 Punkt] $\quad V(\vec{r}) = A\,(x^2 + y^2 + \alpha\,z^2)^{-\frac{1}{2}}\,,$

3) [1 Punkt] $\quad V(\vec{r}) = \frac{B}{r^2}\,.$

Dabei sind A, B, c, k, α und r_0 Konstanten. Welches Kraftfeld ergibt sich bei 2) für $\alpha = 1$?

b) Untersuchen Sie für die folgenden Kraftfelder, ob es ein dazugehöriges Potential gibt. Falls es eines gibt, berechnen Sie es.

4) [1 Punkt] $\quad \vec{F}(\vec{r}) = A\,\frac{\vec{r}}{r^3}\,,$

5) [1 Punkt] $\quad \vec{F}(\vec{r}) = \frac{B}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$

Dabei sind A und B Konstanten.