Aufgabe 32: **Kosmische Geschwindigkeiten** **(mündlich, 6 Punkte)**

Als kosmische Geschwindigkeiten werden einige Geschwindigkeitswerte bezeichnet, die in der Raumfahrt besondere Bedeutung haben und sich aus den physikalischen Parametern der Erde sowie der Himmelsmechanik ergeben.

Nehmen Sie für Ihre Berechnungen folgenden Werte an: $M_{\text{Erde}} = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $R_{\text{Erde}} = 6378$ km.

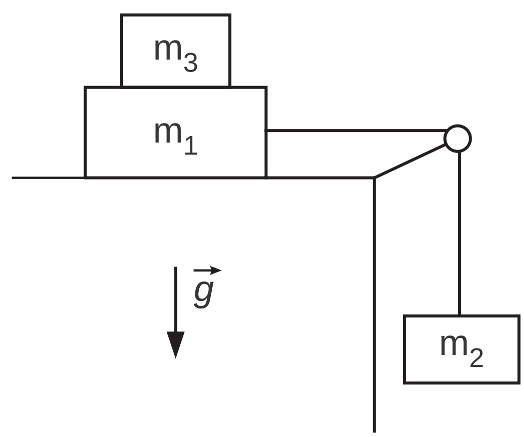
a) [2 Punkte] *Erste kosmische Geschwindigkeit:* Ein Flugkörper benötigt mindestens diese Geschwindigkeit, um antriebslos in einer (hypothetischen) Kreisbahn an der Erdoberfläche zu bleiben, ohne auf die Erdoberfläche zurückzufallen. Berechnen Sie diese Geschwindigkeit v_1. Wie groß ist die Geschwindigkeit für einen realistischen Orbit in 200 km Höhe?

b) [2 Punkte] Um Treibstoff zu sparen, starten Raketen möglichst nah am Äquator. Wie groß ist der maximale Geschwindigkeitsbeitrag zu v_1 durch die Erdrotation und in welche Richtung (Norden, Osten, Süden, Westen) muss der Raketenstart erfolgen?

c) [2 Punkte] *Zweite kosmische Geschwindigkeit:* Ein Flugkörper benötigt mindestens diese Geschwindigkeit, um antriebslos dem Gravitationsfeld der Erde zu entkommen. Zur Berechnung von v_2 betrachten Sie eine senkrecht startende Rakete, die eine Startgeschwindigkeit v_0 besitzt und anschließend antriebslos weiterfliegt (Luftreibungskräfte sollen vernachlässigt werden). Benutzen Sie für Ihre Rechnung den Energiesatz der klassischen Mechanik.

Aufgabe 33: **Rutschende Masse unter Haft- und Gleitreibung** **(mündlich, 6 Punkte)**

An einem über eine Rolle laufenden dehnungs- und masselosen Seil sind zwei Massen $m_1 = 6$ kg und $m_2 = 10$ kg befestigt (vgl. Abbildung). Der Haftreibungskoeffizient für m_1 und die Auflage hat den Wert $\mu_h = 0{,}625$. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt $\mu_g = 0{,}33$.



a) [4 Punkte] Wie groß muss die Masse m_3 mindestens gewählt werden, so dass sich m_1 nicht bewegt?

Hinweis: Betrachten Sie hierfür zunächst m_2 und $m_1 + m_3$ getrennt und stellen Sie die jeweilige Bewegungsgleichung unter Berücksichtigung der an den Massen angreifenden Kräfte (inklusive der jeweiligen Seilkraft) auf. Nutzen Sie anschließend aus, dass die Massen durch ein dehnungsloses Seil miteinander verbunden sind.

b) [2 Punkte] Mit welcher Beschleunigung bewegt sich das System ohne die Masse m_3?

Aufgabe 34: **Kepler-Problem** **(mündlich, 8 Punkte)**

Die Bahnkurve eines Körpers mit der Masse m im Gravitationspotential einer Masse M ist durch

$$r\,(\varphi) \;=\; \frac{k}{1\,+\,\varepsilon\,\cos\,(\varphi\,-\,\varphi_P)}$$

gegeben.

a) [6 Punkte] Stellen Sie für $\varphi_P \;=\; 0$ die obige Gleichung in kartesischen Koordinaten ($x \;=\; r\,\cos\,\varphi$, $y \;=\; r\,\sin\,\varphi$) dar. Diskutieren Sie die Fälle $\varepsilon \;=\; 0$, $\varepsilon \;<\; 1$, $\varepsilon \;=\; 1$ und $\varepsilon \;>\; 1$. Skizzieren Sie dazu die Kurven in der x-y-Ebene. Wie hängen für elliptische (+) Bahnen und hyperbolische (−) Bahnen

$$\frac{(x \pm e)^2}{a^2} \;\pm\; \frac{y^2}{b^2} \;=\; 1$$

die große und die kleine Halbachse von k, von ε und von den physikalischen Parametern Drehimpuls und Energie ab?

b) [2 Punkte] Wie verhalten sich für $\varepsilon < 1$ die Geschwindigkeiten v_P und v_A am Perihel und am Aphel zueinander?

Aufgabe 35: **Bewegung im Kraftfeld** **(schriftlich, 8 Punkte)**

a) Gegeben sei ein Kraftfeld

$$\vec{F}\,(\vec{r}\,) \;=\; A\,\left(y^2\,z^3,\,2\,x\,y\,z^3,\,3\,x\,y^2\,z^2\right)\;\;.$$

i) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $\vec{F}$ eine konservative Kraft ist.

ii) [2 Punkte] Berechnen Sie die Arbeit, die zur Beförderung einer Punktmasse m vom Ursprung $\vec{r}_0 \;=\; (0,\,0,\,0)$ zum Ort $\vec{r}_1 \;=\; (x_1,\,y_1,\,z_1)$ erforderlich ist. Wählen Sie dazu den Weg entlang der Geraden von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}_1$, d. h. $\vec{r} \;=\; \lambda\,(x_1,\,y_1,\,z_1)$ mit $0 \;\leq\; \lambda \;\leq\; 1$. Hängt die Arbeit vom Weg ab?

iii) [2 Punkte] Wie lautet das Potential? Überprüfen Sie, ob aus dem Potential die oben angegebene Kraft folgt.

b) Gegeben sei das Potential

$$V\,(\vec{r}\,) \;=\; V_0\,\left(x^2\,+\,y^2\,+\,\alpha\,z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

mit den Konstanten V_0 und α.

i) [1 Punkt] Berechnen Sie die zugehörige Kraft.

ii) [1 Punkt] Berechnen Sie das Drehmoment, das auf einen Massenpunkt bei $\vec{r} \;=\; (x,\,y,\,z)$ wirkt.

iii) [1 Punkt] Für welche Werte von α ist der Drehimpuls $\vec{L}$ zeitlich konstant?

Aufgabe 36: **Gleitreibung** **(schriftlich, 5 Punkte)**

Ein Schlitten wird auf einer ebenen Eisfläche mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s angeschoben. Wie weit gleitet der Schlitten unter dem Einfluss der Gleitreibungskraft $F = -\mu\, m\, g\, \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$ ohne weiteren Anschub ($\mu = 0{,}05$)?

Hinweis: Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie diese.

Aufgabe 37: **Geostationäre Umlaufbahn** **(schriftlich, 7 Punkte)**

Die Erde dreht sich in 86164 s einmal um ihre Achse.

a) [1 Punkt] Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde?

b) [3 Punkte] Welche Entfernung h von der Erdoberfläche muss ein künstlicher Satellit haben, der über einem bestimmten Punkt des Äquators stillzustehen scheint (geostationärer Umlauf)? (Radius der Erde: $R = 6378$ km, Masse der Erde: $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg; Gravitationskonstante: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\ s}^2}$)

c) [2 Punkte] Unter welchem Winkel α zur Horizontalen erscheint in Münster (52. Breitengrad) ein solcher Satellit, wenn er sich auf dem gleichen Längengrad befindet?

d) [1 Punkt] Warum kann man keinen Satellit geostationär über Münster fliegen lassen?