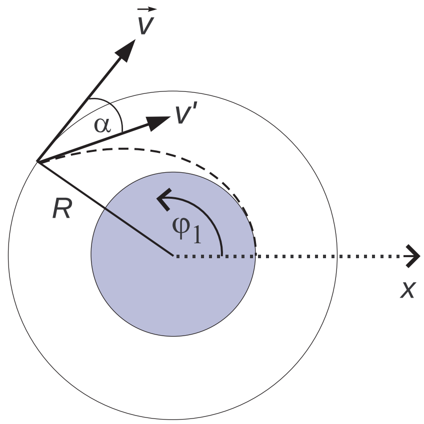
Übungen zur Physik I: Blatt 7 WS 2016/17 Vorlesung: Prof. Kappes/Prof. Krüger
Abgabe: 05./06.12.2016 Übungen: Dr. Kovařík

Aufgabe 38: Bewegung im Gravitationsfeld (schriftlich, 6 Punkte)

Eine Raumkapsel bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius $R = 2\,R_E$ um die Erde. Durch Steuerungsdüsen wird bei $\varphi = \varphi_1$ ihre Flugrichtung um den Winkel α verändert. Die Energie bleibe dabei erhalten. Wie groß sind α und φ_1 zu wählen, damit die Kapsel bei $\varphi = 0$ die Erde berührt (Luftreibung, die eine Landung sanfter gestalten würde, soll nicht betrachtet werden)?



Hinweis: Berechnen Sie zunächst den Drehimpuls und die Energie der Kapsel auf der Umlaufbahn und überlegen Sie dann, wie ε und k für eine Bahn zur Erde zu wählen sind.

Aufgabe 39: Halleyscher Komet (mündlich, 4 Punkte)

Der Halleysche Komet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne. Die Exzentrizität der Bahn ist $\varepsilon = 0{,}967$ und die Periode des Kometen beträgt 76 Jahre. Die Masse der Sonne ist 2×10^{30} kg und die Gravitationskonstante ist $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N.m^2/kg^2}$.

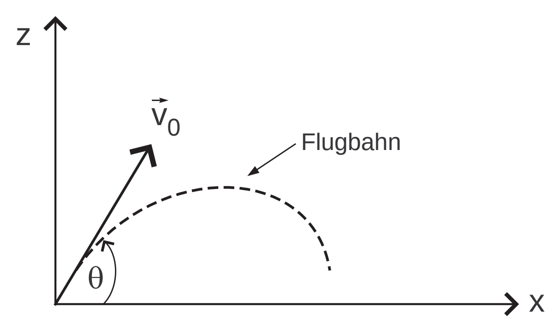
a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Distanz des Kometen zur Sonne im Perihel und im Aphel.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Kometen am sonnennächsten Punkt der Bahn.

Hinweis: Verwenden Sie das 3. Kepler'sche Gesetz, um die Länge der großen Halbachse mit der Periodendauer zu verknüpfen.

Aufgabe 40: Schiefer Wurf mit Reibung (schriftlich, 10 Punkte)

Ein Ball der Masse m wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel θ gegen die Horizontale im *homogenen Schwerefeld* der Erde in der x-z-Ebene abgeworfen. Bei $t = 0$ befindet sich der Ball am Koordinatenursprung. Der Ball unterliegt der Reibungskraft $\vec{F}_r = -\gamma\,\dot{\vec{r}}$.



a) [4 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x\,(t)$ und $z\,(t)$ auf. Lösen Sie diese linearen Differentialgleichungen unter Verwendung des Ansatzes $e^{\lambda\,t}$ für die homogenen Gleichungen. Eine *spezielle* Lösung der inhomogenen Gleichung bei der Bewegung in z-Richtung lässt sich durch den Ansatz $z_s\,(t) = D \cdot t$ finden. Dabei ist D eine geeignet zu bestimmende Konstante.

b) [1 Punkt] Wann erreicht der Ball die maximale Höhe und wie hoch fliegt er?

c) [2 Punkte] Untersuchen Sie den Fall geringer Reibung ($\gamma \to 0$). Entwickeln Sie Ihre Ergebnisse aus b) in eine Reihe um $\gamma = 0$ und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen für einen schiefen Wurf ohne Reibung.

d) [2 Punkte] Wie weit fliegt der Ball bei geringer Reibung? Die transzendente Gleichung, die Sie dazu lösen müssten, kann für kleine γ (durch Entwicklung um $\gamma = 0$) vereinfacht und gelöst werden. Entwickeln Sie wieder nur bis zur ersten nichttrivialen Ordnung in γ. Zeigen Sie, dass der Ball bei gleichem v und θ nicht so weit fliegt wie im reibungslosen Fall.

e) [1 Punkt] Muss der Abwurfwinkel für die maximale Reichweite mit Reibung größer oder kleiner sein als $\pi/4$?

Aufgabe 41: Kuchen auf einem Tisch **(mündlich, 7 Punkte)**

Sie befinden sich auf einer Party und möchten die anderen Gäste beeindrucken, indem Sie die Tischdecke eines runden Tisches (Radius 70 cm), auf dem genau in der Mitte ein ebenso runder Kuchen steht, unter diesem wegziehen, ohne dass der Kuchen zu Boden fällt. Der (geschwindigkeitsunabhängige) Gleitreibungskoeffizient des Kuchens auf der Tischdecke beträgt $\mu_1 = 0{,}3$. der des Kuchens auf dem Tisch $\mu_2 = 0{,}4$.

a) [3 Punkte] Welche Strecke d legt der Kuchen während der Zeitspanne T zurück, in der er noch mit dem Tischtuch in Kontakt ist? Die Übergangsphase, in der der Kuchen von der Decke heruntergleitet, werde vernachlässigt.

b) [3 Punkte] Wie groß darf das Zeitintervall T sein, damit der Kuchen nicht herunterfällt, d. h. damit sein Mittelpunkt sich am Ende noch auf dem Tisch befindet?

c) [1 Punkt] Wie schnell muss sich die Tischdecke bewegen (in km/h)?

Aufgabe 42: Quadratische Matrizen **(mündlich, 9 Punkte)**

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ seien (quadratische) 3×3-Matrizen mit reellen Koeffizienten, d. h. $i = 1 \ldots 3$ und $j = 1 \ldots 3$. Die Matrix-Addition $A + B$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} S = (s_{ij}) &= A + B \\ s_{ij} &= a_{ij} + b_{ij} \;, \end{aligned}$$

und das Matrix-Produkt $A\,B$ durch

$$\begin{aligned} P = (p_{ij}) &= A\,B \\ p_{ij} &= \sum_k a_{ik}\, b_{kj} \;. \end{aligned}$$

a) [3 Punkte] Begründen Sie die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \;, \\ A\,(B + C) &= A\,B + A\,C \;, \\ A\,(B\,C) &= (A\,B)\,C =: A\,B\,C \;. \end{aligned}$$

b) [1 Punkt] Begründen Sie, warum im Allgemeinen das Matrix-Produkt nicht kommutativ ist, d. h. $A\,B \neq B\,A$.

c) [1 Punkt] Die zu A transponierte Matrix A^T ist definiert durch $A^T = (a^T_{ij}) = (a_{ji})$. Zeigen Sie, dass gilt $(A\,B)^T = B^T\,A^T$.

d) [1 Punkt] Eine quadratische Matrix A heißt symmetrisch, falls $A = A^T$ bzw. $(a_{ij}) = (a_{ji})$, und schiefsymmetrisch, falls $A = -A^T$ bzw. $(a_{ij}) = (-a_{ji})$. Zeigen Sie, dass für eine beliebige quadratische Matrix A die Zerlegung

$$A = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) + \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

einer Zerlegung in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil entspricht.

e) [3 Punkte] Die zu A inverse Matrix A^{-1} ist (falls sie existiert, d. h. falls $\det A \neq 0$) definiert durch $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I$, wobei $I = (\delta_{ij})$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\begin{aligned}(A\,B)^{-1} &= B^{-1}\,A^{-1}\,,\\ (A^{-1})^{-1} &= A\,,\\ (A^{-1})^T &= (A^T)^{-1}\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 43: Matrizen und Determinanten (schriftlich, 4 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Berechnen Sie

a) [1 Punkt] A $\cdot\vec{a}$ und $\vec{a}\cdot A\cdot\vec{a}$

b) [1 Punkt] $A + B$ und $A\cdot B$

c) [1 Punkt] $\det A + \det B$ und $\det\,(A + B)$

d) [1 Punkt] $\det A\cdot\det B$ und $\det\,(A\cdot B)$