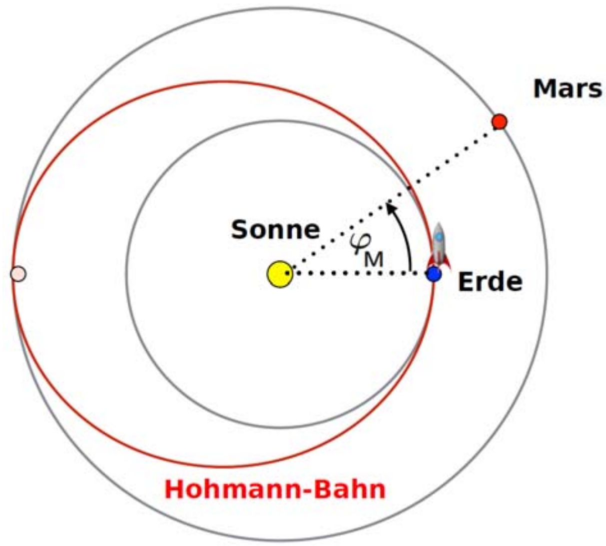
Aufgabe 44: Hohmann-Orbit **(schriftlich, 8 Punkte)**

Eine energieeffiziente Reise von der Erde zu anderen Planeten wird durch eine spezielle Bahnform, die sogenannte Hohmann-Übergangsbahn, ermöglicht (siehe Abbildung). Entgegen der ersten Vermutung führt sie nicht auf dem direktesten Weg zum Planeten, sondern durchquert einen guten Teil des Sonnensystems. Man startet von der Erde auf der einen Seite der Sonne und kommt auf der anderen Seite am Planeten an. Die Triebwerke des Raumschiffes werden dabei nur zweimal kurz gezündet: beim Verlassen der Erdbahn und bei der Ankunft an der Planetenbahn. Während der übrigen Zeit bewegt sich das Raumschiff nur unter dem Einfluss der Gravitation der Sonne.



Im Folgenden sollen Sie einige Berechnungen zu diesen Bahnen für eine Reise zum Mars durchführen. Die Umlaufbahnen von Erde und Mars können dabei als Kreisbahnen mit den Radien $R_E = 150 \cdot 10^6$ km bzw. $R_M = 228 \cdot 10^6$ km angenommen werden. Die Masse der Sonne beträgt $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

a) [2 Punkte] Nach dem Start bewege sich das Raumschiff parallel zur Erde und befinde sich bereits soweit von der Erde entfernt, dass deren Gravitationskraft vernachlässigt werden kann. Welche Geschwindigkeitsänderung (Betrag) durch Zünden der Triebwerke ist nun erforderlich, um auf die Hohmann-Bahn zum Mars zu gelangen?

b) [2 Punkte] Berechnen Sie die Flugzeit zum Mars. In welcher Winkelposition φ_M relativ zur Erde muss sich der Mars beim Start des Raumschiffs befinden (siehe Zeichnung), damit das Raumschiff die Marsbahn zum richtigen Zeitpunkt erreicht?

c) [2 Punkte] Mit welcher Geschwindigkeit wird das Raumschiff den Mars erreichen? Muss das Raumschiff nun beschleunigt oder abgebremst werden, um in die Umlaufbahn des Mars um die Sonne einzuschwenken und wie groß ist der Betrag der erforderlichen Geschwindigkeitsänderung?

d) [2 Punkte] Anstatt zum Mars wollen Sie mit ihrem Raumschiff den Gravitationsbereich der Sonne verlassen. Die Ausgangssituation ist die gleiche wie in a). Berechnen Sie die nötige minimale absolute Geschwindigkeit (Fluchtgeschwindigkeit) und die erforderliche Geschwindigkeitsänderung in Flugrichtung. Um was für eine Bahnform handelt es sich?

Aufgabe 45: Offene Flugbahn im Gravitationsfeld (mündlich, 6 Punkte)

Ein Körper mit der Masse m bewege sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{m\,M\,G}{r^3}\,\vec{r}\,.$$

Zur Zeit $t = 0$ befinde sich der Körper bei $\vec{r}_0 = (r_0,\, 0,\, 0)$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0,\, v_0,\, 0)$.

a) [3 Punkte] Geben Sie die Bahnparameter k und ε (siehe Vorlesung) in Abhängigkeit von r_0 und v_0 an. Wie groß muss v_0 bei vorgegebenem r_0 mindestens sein, damit die Flugbahn nicht geschlossen ist?

b) [3 Punkte] Die Anfangsgeschwindigkeit betrage

$$v_0 = 2\sqrt{\frac{M\,G}{r_0}}\,.$$

Welche Form hat die Bahnkurve? Geben Sie $r(\varphi)$ an. In welchem Abstand vom Kraftzentrum schneidet die Flugbahn des Körpers die y-Achse? Unter welchem Winkel φ relativ zur positiven x-Achse bewegt sich der Körper für $r \to \infty$? Skizzieren Sie die Bahnkurve.

Aufgabe 46: Bewegung im Zentralpotential (mündlich, 7 Punkte)

Zwei Teilchen bewegen sich in einem Zentralpotential ohne weitere Einflüsse von außen. Das eine Teilchen ist dreimal so schwer wie das andere ($m_1 = 3\,m_2$) und das Potential hat die Form

$$V(r) = -\frac{\Gamma}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{\frac{3}{2}}}\,,$$

wobei die Vektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ Orte der Teilchen darstellen und die Konstante $\Gamma > 0$ sei.

a) [2 Punkte] Erläutern Sie, warum die Bewegung der Teilchen in einer Ebene stattfindet. Überlegen Sie zur Begründung, welche Erhaltungssätze im betrachteten System gelten.

b) [3 Punkte] Man kann äquivalent zur Bewegung der beiden Teilchen mit Massen m_1 und m_2 auch die Bewegung eines hypothetischen Teilchens mit der reduzierten Masse μ betrachten, dessen Ortsvektor $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der Verbindungsvektor der beiden Teilchen ist. Geben Sie die Gesamtenergie E der Bewegung dieses hypothetischen Teilchens als Funktion des Abstands und Γ an. Geben Sie das effektive Potential der Bewegung an und skizzieren Sie es.

c) [2 Punkte] Angenommen, das leichte Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn um das andere Teilchen. Welcher Punkt des effektiven Potentials entspricht dem Radius der Kreisbahn? Geben Sie den Radius r_0 dieser Bewegung in Abhängigkeit von Γ, der Masse des leichteren Teilchens und des Gesamtdrehimpulses an.

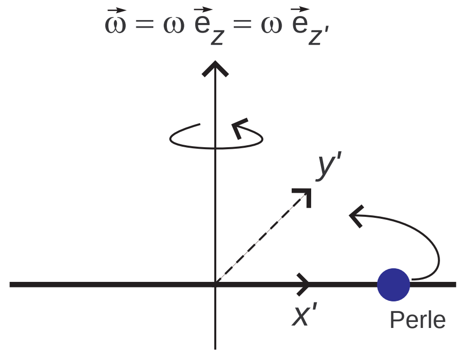
Aufgabe 47: Scheinkräfte (schriftlich, 6 Punkte)

Eine Perle gleite reibungsfrei auf einem Draht, der senkrecht zur z-Achse mit einer festen Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Es ist zweckmäßig, die Dynamik der Perle in einem mitrotierenden Koordinatensystem zu behandeln, da hier die Bewegung der Perle nur entlang der x'-Richtung erfolgt, d. h. $\vec{r}\,' = x'\,\vec{e}_x\,'$.

a) [2 Punkte] Stellen Sie die Bewegungsgleichung für x' auf. Berücksichtigen Sie dabei die Zentrifugalkraft.

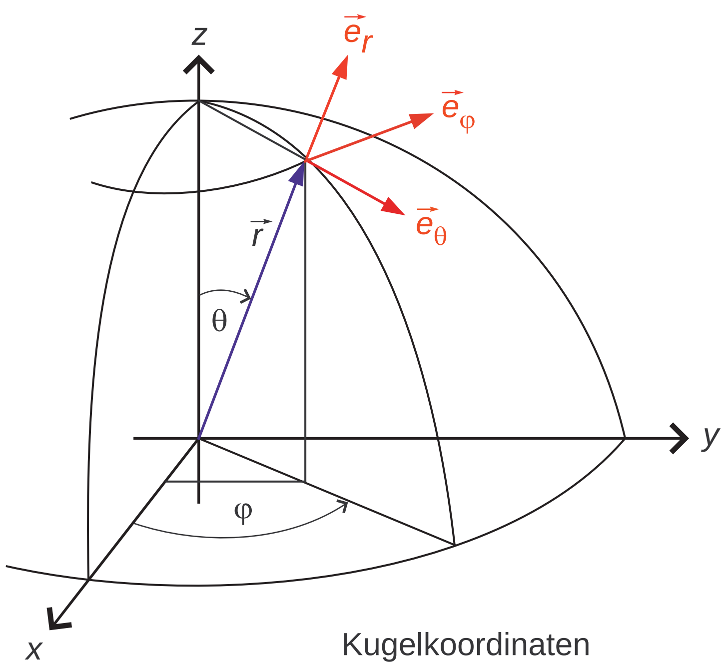
b) [3 Punkte] Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $x'(0) = x'_0$ und $v'_x(0) = 0$ (*Hinweis:* Verwenden Sie den Ansatz $x'(t) = e^{\lambda t}$.) Skizzieren Sie den Bewegungsverlauf als Funktion der Zeit.

c) [1 Punkt] Berechnen Sie die Energie der Perle im rotierenden System.



Aufgabe 48: Rotierende Erde und Kugelkoordinaten (schriftlich, 6 Punkte)

Wenn Sie in Münster in der Vorlesung sitzen, befinden Sie sich immer in einem Zustand schneller Rotation, da sich die Erde (Radius $R = 6378$ km) in 86164 s einmal um ihre Achse dreht.



Kugelkoordinaten

a) [3 Punkte] In Aufgabe 24 haben Sie die Beschleunigung in Kugelkoordinaten berechnet. Verwenden Sie diese Ergebnisse, um die Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}$ zu berechnen, die ein Körper am Breitengrad α aufgrund der Erdrotation erfährt. Hier gilt $\vec{r} = r\vec{e}_r$ mit $r = R$, $\varphi = \omega t$, $\theta = 90° - \alpha$. Dabei sind R, ω und θ zeitlich konstant. Geben Sie den Betrag von $\vec{a}$ am Äquator und in Münster ($\alpha = 52°$) an.

b) Bei einer Beschreibung in einem rotierenden Bezugssystem treten Scheinkräfte auf.

   i) [2 Punkte] Benutzen Sie den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \cos\theta\, \vec{e}_r - \omega \sin\theta\, \vec{e}_\theta$, um die auf einen Körper der Masse m wirkende Zentrifugalkraft $\vec{F}_{\text{zf}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ am Äquator und in Münster zu bestimmen. Geben Sie Ihr Resultat sowohl mit Hilfe der Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten als auch in Komponenten der kartesischen Koordinaten an. Vergleichen Sie die Resultate für die Zentrifugalkraft und für die aus der Zentripetalbeschleunigung folgende Kraft $\vec{F}_{\text{zp}} = m\,\vec{a}$.

   ii) [1 Punkt] Neben der Zentrifugalkraft wirkt die radial zum Erdmittelpunkt gerichtete Schwerkraft $\vec{F}_g = -m\,g\,\vec{e}_r$ mit $g = 9{,}832$ m/s^2 (an den Polen) auf den Körper. Berechnen Sie den Betrag der Gesamtkraft $\vec{F} = \vec{F}_{\text{zf}} + \vec{F}_g$ am Äquator und in Münster.

(*Hinweis*: Führen Sie Ihre Rechnungen zunächst in Abhängigkeit vom Winkel θ durch und setzen Sie erst am Ende der jeweiligen Rechnung die konkreten Werte für den entsprechenden Breitengrad ein.)

Aufgabe 49: Puck auf dem Eis (mündlich, 7 Punkte)

Die rotierenden Erde sei von einer perfekten Eisfläche überzogen, auf der ein Puck reibungfrei gleiten kann. An einem Ort mit der geografischen Breite α wird ein Puck mit der Geschwindigkeit v abgeschlagen.

a) [2 Punkte] Begründen Sie, warum die Corioliskraft zu einer kreisförmigen Bewegung des Pucks führt. Ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit bei der Bewegung?

b) [2 Punkte] Berechnen Sie den Kreisradius für eine Anfangsgeschwindigkeit von $v = 1$ m/s und $\alpha = 52°$.

c) [1 Punkt] Hängt der Radius von der Richtung ab, in der der Puck geschlagen wird?

d) [2 Punkte] Was geschieht am Nordpol bzw. am Äquator?

Begründen Sie Ihre Antworten in c) – d).