

Aufgabe 1: Elementare Funktionen

Geben Sie für folgende Funktionen den Definitions- und Wertebereich an. Diskutieren Sie Symmetrie und asymptotisches Verhalten. Skizzieren Sie die Funktionen.

a) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = e^{-x}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = e^{-x^2}$

f) $f(x) = \frac{1}{x}$

Aufgabe 2: Symmetrie

Sind folgende Funktionen gerade oder ungerade?

a) $f(x) = 3x^3 + 7x^2 + \frac{1}{2}x$

e) $f(x) = \sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \frac{4x^6 + 16x^2}{x^2 + 4}$

f) $f(x) = \sqrt{27 + x^2}$

c) $f(x) = -\frac{7}{x}$

g) $f(x) = x^2(2+x) - 4x^2$

d) $f(x) = e^{-15x^2 + \frac{1}{2}}$

h) $f(x) = \exp\left(\frac{1}{5}x\right)$

i) $f(x) = x^2 e^{-|x|}$

Aufgabe 3: Verkettung von Funktionen

Bilden Sie die Funktionen $f(x) = u[v(x)]$ und $g(x) = v[u(x)]$

a) $u(x) = 2+5x$

$v(x) = 2 - 3x$

e) $u(x) = \frac{1}{4+x^2}$

$v(x) = \frac{2}{x}$

b) $u(x) = 2+x$

$v(x) = x^2$

f) $u(x) = 1+x^3$

$v(x) = 2\ln(x)$

c) $u(x) = 1-x^2$

$v(x) = (1-x)^2$

g) $u(x) = \sqrt{x^2+1}$

$v(x) = \frac{4}{x}$

d) $u(x) = e^x$

$v(x) = x^2$

Aufgabe 4: Umkehrfunktion

Bilden Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}(y)$ zu

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

Diskutieren Sie den Definitions- und Wertebereich.

Vergleichen Sie \bar{f} mit $f \circ f$

Aufgabe 5: Rechnen mit Potenzen

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (es sei $n \in \mathbb{N}$).

a) $0.3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$

b) $2^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$

c) $2^n \left(\frac{x}{2}\right)^n x$

d) $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2n} \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2n}$

e) $(a-b)^n + (b-a)^n$

f) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}$

g) $e^{-x} e^{-x+2} e^{2x+3}$

h) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$

i) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$

Aufgabe 6: Zerlegen von Logarithmen

Schreiben Sie folgende Ausdrücke als Summe bzw. Produkt:

a) $\ln\left(\sqrt{\frac{3x^2\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{x}}}\right)$

c) $\ln\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

e) $\ln\left(\sqrt[4]{c^3\sqrt{b\sqrt{a}}}\right)$

b) $\ln\left(\frac{\sqrt[3]{u}}{v^2 - w^2}\right)$

d) $\ln[x^{\ln(x)}]$

Aufgabe 7: Zusammenfassen von Logarithmen

Fassen Sie folgende Terme zu einem einzelnen Logarithmus zusammen.

a) $2 \ln(u^2) + \frac{1}{2} \ln(uv) - 4 \ln\left(\frac{u}{v^2}\right)$

c) $\frac{1}{3} \left\{ \ln(a) + \frac{1}{3} \ln(a-b) - 2 \left[\ln(b) + \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \right] \right\}$

b) $\ln(a^2b^2) - 2 \ln(ab^2)$

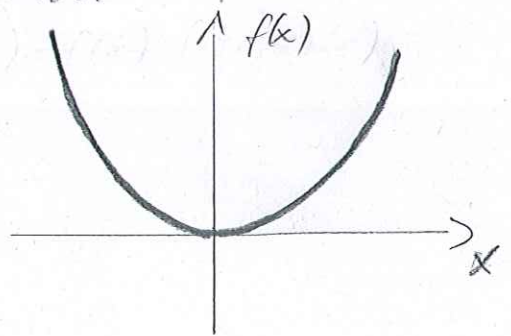
Aufgabe 1: Elementare Funktionen

a) $f(x) = x^2$

$\rightarrow D = \mathbb{R}$
 $W = \mathbb{R}^+$

$f(-x) = f(x)$ (gerade)

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \infty$



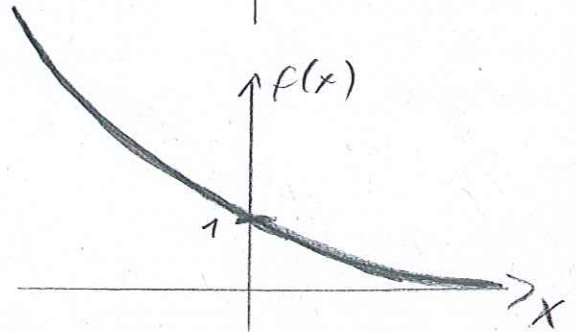
b) $f(x) = e^{-x}$

$\rightarrow D = \mathbb{R}$
 $W = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

keine Symm.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \infty$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

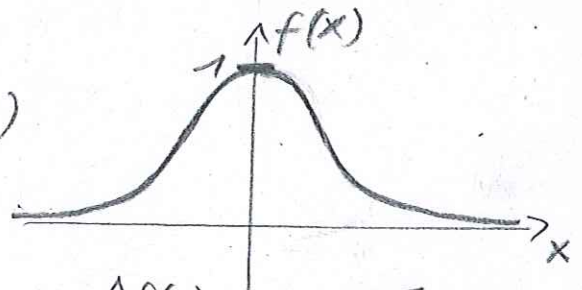


c) $f(x) = e^{-x^2}$

$\rightarrow D = \mathbb{R}$
 $W =]0, 1]$

$f(-x) = f(x)$ (gerade)

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$



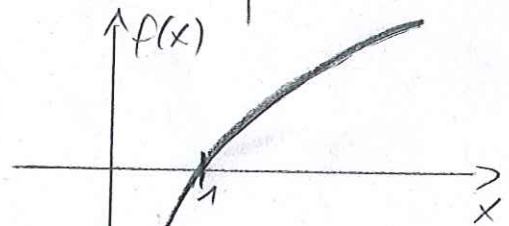
d) $f(x) = \ln(x)$

$\rightarrow D = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$
 $W = \mathbb{R}$

keine Symm.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$



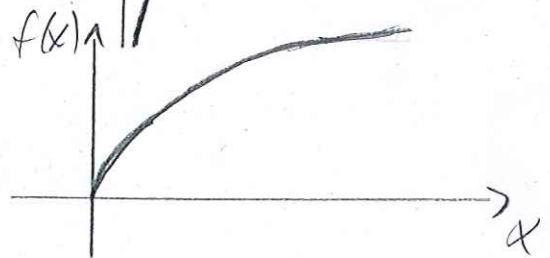
e) $f(x) = \sqrt{x}$

$\rightarrow D = \mathbb{R}^+$
 $W = \mathbb{R}^+$

keine Symm.

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$

$f(0) = 0$



$f(x) = \frac{1}{x}$

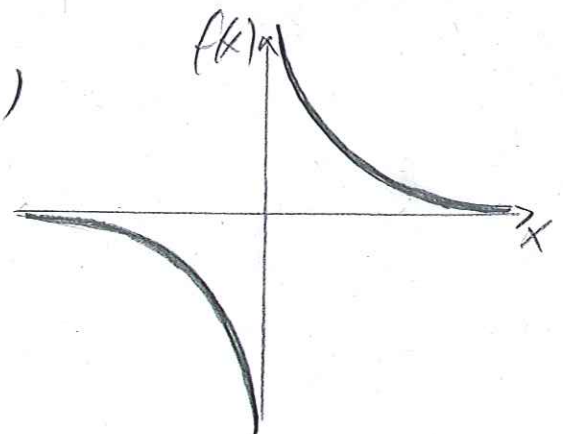
$\rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = -f(x)$ (ungerade)

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$



Aufgabe 2: Symmetrie

- a) $f(-x) \neq \pm f(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie
(Funktion enthält gerade und ungerade Potenzen)
- b) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade (nur gerade Potenzen)
- c) $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ ungerade (nur unger. Potenz -1)
- d) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade
- e) keine Symmetrie ($D = \mathbb{R} > -1$)
- f) $f(-x) = f(x) \Rightarrow$ gerade
- g) keine Symmetrie (gerade & ungerade Potenzen)
- h) $f(-x) \neq \pm f(x)$ keine Symmetrie
- i) $f(-x) = f(x)$ gerade (x^2 und $|x|$ sind gerade)

Aufgabe 3: Verkettung von Funktionen

- a) $f(x) = 2 + 5(2 - 3x)$ $g(x) = 2 - 3(2 + 5x)$
 $= 12 - 15x$ $= -4 - 15x$
- b) $f(x) = 2 + x^2$ $g(x) = (2 + x)^2 = 4 + 4x + x^2$
- c) $f(x) = 1 - (1 - x)^4$ $g(x) = [1 - (1 - x^2)]^2 = x^4$
- d) $f(x) = e^{(x^2)}$ $g(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$
- e) $f(x) = \frac{1}{4 + \frac{4}{x^2}} = \frac{x^2}{4(1+x^2)}$ $g(x) = \frac{2}{\frac{1}{4+x^2}} = 8 + 2x^2$
- f) $f(x) = 1 + 8[\ln(x)]^3$ $g(x) = 2 \ln(1 + x^3)$
- g) $f(x) = \sqrt{\frac{16}{x^2} + 1}$ $g(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Aufgabe 4: Umkehrfunktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{1\}, W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Berechnung der Umkehrfunktion:

$$y = \frac{1}{1-f(y)} \Leftrightarrow 1-f(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow f(y) = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Berechnung der Verknüpfung $f \circ f$

$$f \circ f = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-1} = 1 - \frac{1}{x} = \bar{f}(x)$$

Aufgabe 5: Rechnen mit Potenzen

a) $0,3^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = \left(\frac{3}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6 = \left(\frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 3}\right)^6 = 1^6 = 1$

b) $2^5 \cdot \frac{1}{2^4} = 2^{5-4} = 2$

c) $2^n \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot x = 2^n \cdot 2^{-n} \cdot x^n \cdot x = x^{n+1}$

d) $\left(\frac{a-b}{c}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{c}{b-a}\right)^{2n} = \left(\frac{-(b-a) \cdot c}{c \cdot (b-a)}\right)^{2n} = (-1)^{2n} = 1^n = 1$

e) $(a-b)^n + (b-a)^n = (a-b)^n + (-1)^n (a-b)^n = \begin{cases} 2(a-b)^n, & n \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

f) $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{e^x - e^{-x}} = e^x + e^{-x}$

g) $e^{-x} e^{-x+2} e^{2x+3} = e^{-x-x+2x+2+3} = e^5$

h) $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{3x+x+1-2} = e^{4x-1}$

i) $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2 = e^{-2x} + 3e^{-2x} - 4e^{-2x} = 0$

Aufgabe 6: Zerlegen von Logarithmen

$$a) \ln\left(\sqrt{\frac{3x^2\sqrt{y}}{2y^2\sqrt{x}}}\right) = \frac{1}{2} [\ln(3) + 2\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) - \ln(2) - 2\ln(y) - \frac{1}{2}\ln(x)]$$

$$b) \ln\left(\frac{\sqrt[3]{u}}{v^2-w^2}\right) = \frac{1}{3}\ln(u) - \ln(v+w) - \ln(v-w)$$

$$c) \ln\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \ln(4) - \ln(3) + \ln(\pi) + 3\ln(r)$$

$$d) \ln[x^{\ln(x)}] = \ln(x) \cdot \ln(x) = [\ln(x)]^2$$

$$e) \ln\left(\sqrt[4]{c\sqrt[3]{b\sqrt{a}}}\right) = \frac{1}{4} \left\{ \ln(c) + \frac{1}{3} [\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(a)] \right\} \\ = \frac{1}{4}\ln(c) + \frac{1}{12}\ln(b) + \frac{1}{24}\ln(a)$$

Aufgabe 7: Zusammenfassen von Logarithmen

$$a) 2\ln(u^2) + \frac{1}{2}\ln(uv) - 4\ln\left(\frac{u}{v^2}\right)$$

$$= \ln(u^4) + \ln(\sqrt{uv}) + \ln\left(\frac{v^8}{u^4}\right) = \ln\left(\frac{u^4\sqrt{uv}v^8}{u^4}\right) = \ln(v^8\sqrt{uv})$$

$$b) \ln(a^2b^2) - 2\ln(ab^2)$$

$$= \ln\left(\frac{a^2b^2}{a^2b^4}\right) = \ln\left(\frac{1}{b^2}\right) = -2\ln(b)$$

$$c) \frac{1}{3} \left\{ \ln(a) + \frac{1}{3}\ln(a-b) - 2 \left[\ln(b) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{a}{b^2}\right) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\ln(a) + \ln(\sqrt[3]{a-b}) + \ln\left(\frac{1}{b^2}\right) + \ln\left(\frac{(b^2)^{2/3}}{a^{2/3}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{a \cdot \sqrt[3]{a-b} \cdot b^{4/3}}{b^2 \cdot a^{2/3}}\right) = \frac{1}{3} \ln\left(a^{1/3} b^{-2/3} \sqrt[3]{a-b}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \ln\left(\sqrt[3]{\frac{a(a-b)}{b^2}}\right) = \ln\left(\sqrt[9]{\frac{a^2-ab}{b^2}}\right)$$