Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale

Bestimmen Sie eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$.

a) $f(x) = x^2 + 4x^4$

b) $f(x) = \sqrt{x} - 6x^4$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

d) $f(x) = (7x+3)^7$

e) $f(x) = x\left(3+3x^2\right)^3$

f) $f(x) = \cos(x)\sin^2(x)$

g) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-2x^3}$

h) $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$

i) $f(x) = x\ln(x)$

j) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 2: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie folgende Integrale.

a) $\int_1^5 \mathrm{d}x$

b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2} + 2x\right) \mathrm{d}x$

c) $\int_{-3}^3 |x| \, \mathrm{d}x$

d) $\int_0^\pi \sin(x) \, \mathrm{d}x$

e) $\int_0^{2\pi} \sin(x) \, \mathrm{d}x$

f) $\int_0^{1/2} \sin\left[2\pi(x+1)\right] \mathrm{d}x$

g) $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-3x} \, \mathrm{d}x$

h) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$

i) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\left[\ln(x)\right]^2}{x} \, \mathrm{d}x$

j) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}} \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 3: Fläche zwischen Funktionen

Die Funktionen $y = x^2$ und $y + 2x^2 = 3$ schließen eine Fläche vollständig ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 4: Variable Integralgrenze

Wie muss in folgenden bestimmten Integralen t gewählt werden, damit die mit der x-Achse eingeschlossene Fläche $A(t)$ verschwindet?

a) $A(t) = \int_0^t \left(-x^2 + \frac{25}{3}\right) \mathrm{d}x$

b) $A(t) = \int_0^t \left(5x^4 - 21x^2 + 10\right) \mathrm{d}x$

c) $A(t) = \int_0^t \cos(2\pi x) \, \mathrm{d}x$

Aufgabe 5: Doppelintegrale

Berechnen Sie folgende bestimmte Doppelintegrale.

a) $\displaystyle\int_1^2 \left[\int_0^t 2\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left[\int_1^t \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$

c) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \left[\int_0^t \sin(x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}t$

Aufgabe 6: Faltung

Die Faltung zweier integrierbarer Funktionen f und g ist definiert durch das Integral

$$h(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Berechnen Sie die Faltung der Funktionen f und g definiert durch

a) $f(t) = t\ , \quad g(t) = t^2$

b) $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\ , \quad g(t) = t$

c) $f(t) = \mathrm{e}^{-at}\ , \quad g(t) = \mathrm{e}^{-bt} \qquad a, b > 0$

Aufgabe 1: Unbestimmte Integrale $F(x)=\int f(x)dx$

a) $F(x)=\int(x^2+4x^4)dx$ (Integration von Potenzen und Summen)

$=\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{5}x^5+c$ (Integrationskonstante)

b) $F(x)=\int(\sqrt{x}-6x^4)dx$ (Wurzel als Potenz schr.)

$=\int(x^{1/2}-6x^4)dx$

$=\frac{1}{3/2}x^{3/2}-6\cdot\frac{1}{5}x^5+C$

$=\frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{5}x^5+C$

c) $F(x)=\int\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ (Brüche in Potenzen schr.)

$=\int(x^{-3}-x^{-2})dx$

$=\frac{1}{-2}x^{-2}-\frac{1}{-1}x^{-1}+C$

$=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}+C$

d) $F(x)=\int(7x+3)^7dx$ Substitution: $7x+3=u$

$=\int(u)^7dx$ dx ersetzen durch $u'=\frac{du}{dx}=7 \Leftrightarrow dx=\frac{1}{7}du$

$=\int u^7\frac{1}{7}du$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}u^8+C$ $u=7x+3$ wieder einsetzen

$=\frac{1}{56}(7x+3)^8+C$

e) $F(x) = \int x(3+3x^2)^3 \, dx$ Substitution: $3+3x^2 = u$

$= \int x \, u^3 \, dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3x} du$

$= \int x \, u^3 \frac{1}{3x} du$ (x kürzt sich raus)

$= \frac{1}{3} \int u^3 \, du$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} u^4 + C$ (u wieder einsetzen)

$= \frac{1}{12} (3x^2+3)^4 + C$

f) $F(x) = \int \cos(x) \sin^2(x) \, dx$ Substitution: $\sin(x) = u$

$= \int \cos(x) \, u^2 \, dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x)$

$\Leftrightarrow dx = \frac{1}{\cos(x)} du$

$= \int \cos(x) \, u^2 \frac{1}{\cos(x)} du$

$= \int u^2 du$

$= \frac{1}{3} u^3 + C$

$= \frac{1}{3} \sin^3(x) + C$

g) $F(x) = \int x^2 e^{-2x^3} dx$ Substitution: $-2x^3 = u$

$= \int x^2 e^u \, dx \Rightarrow \frac{du}{dx} = -6x^2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{-6x^2} du$

$= \int x^2 e^u \frac{1}{-6x^2} du$

$= -\frac{1}{6} \int e^u du = -\frac{1}{6} e^u + C = -\frac{1}{6} e^{-2x^3} + C$

h) $F(x) = \int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx$ Substitution: $1-x = u$

$\Leftrightarrow x = 1-u$

(beides einsetzen)

$= \int \frac{1+(1-u)}{u^2}\,dx$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

$= -\int \frac{2-u}{u^2}\,du$ (Bruch aufteilen)

$= -\int \left(\frac{2}{u^2} - \frac{1}{u}\right) du = \int \left(\frac{1}{u} - 2u^{-2}\right) du$

$= \ln(u) - 2\frac{1}{-1}u^{-1} + c$

$= \ln(u) + \frac{2}{u} + c = \ln(1-x) + \frac{2}{1-x} + c$

i) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v}\,dx$ (Partielle Integration: „$\int u'v = uv - \int uv'$"

$\ln(x)$ soll abgeleitet werden, also $v = \ln(x)$

$\Rightarrow v' = \frac{1}{x}$, $u' = x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$)

$\quad u \quad v$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \underbrace{\frac{1}{2}x^2}_{u} \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx$

$= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + c$

$= \frac{1}{2}x^2 \left[\ln(x) - \frac{1}{2}\right] + c$

j) $F(x) = \int \underset{v}{x^2}\, \underset{u'}{e^{-x}}\, dx$ (Partielle Integration um die Potenz von x^2 zu reduzieren. Also soll x^2 abgeleitet werden $\Rightarrow v = x^2$ $\Rightarrow v' = 2x$, $u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$)

$$= \overset{v}{x^2}\overset{u}{(-e^{-x})} - \int \underset{v'}{2x}\, \underset{u}{(-e^{-x})}\, dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\int \underset{v}{x}\, \underset{u'}{e^{-x}}\, dx$$

(neues Integral mit kleinerer Potenz x^1. Erneut Partielle Integration mit $v = x \Rightarrow v' = 1$, $u' = e^{-x} \Rightarrow u = -e^{-x}$)

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left[x(-e^{-x}) - \int 1(-e^{-x})\, dx\right]$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x}\, dx$$

(letztes Integral ist einfach!)

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} + 2(-e^{-x}) + c$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

Aufgabe 2: Bestimmte Integrale

a) $\int_1^5 dx = [x]_1^5 = 5-1 = 4$

b) $\int_2^4 \left(\frac{1}{x^2}+2x\right)dx = \left[-\frac{1}{x}+x^2\right]_2^4 =$

$= -\frac{1}{4}+4^2-\left(-\frac{1}{2}+2^2\right) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+16-4$

$= \frac{1}{4}+12 = \frac{49}{4}$

c) $\int_{-3}^3 |x|\,dx$ (Achtung: $|x|$ ist stückweise definiert: $|x| = \begin{cases} -x & , x<0 \\ x & , x>0 \end{cases}$ also muss das Integral aufgeteilt werden)

$= \int_{-3}^0 -x\,dx + \int_0^3 x\,dx$ (Subst. im ersten Integral $-x = u \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1$ Grenzen müssen auch ersetzt werden: $u(-3) = -(-3) = 3$ $u(0) = -0 = 0$)

$= \int_3^0 u\,(-1)\,du + \int_0^3 x\,dx$ (Grenzen tauschen wechselt das Vorzeichen im 1. Int.)

$= \int_0^3 u\,du + \int_0^3 x\,dx$ (2 mal das gleiche Int.)

$= 2\cdot\int_0^3 x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^3 = 3^2-0^2 = 9$

Man kann $\int_{-3} -x\,dx$ natürlich auch direkt ausrechnen.

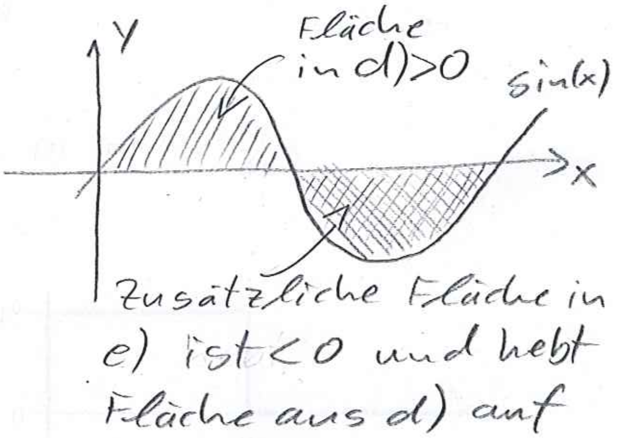
d) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - [-\cos(0)]$

$= -(-1) + 1 = 2$

e) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0)$

$= -1 + 1 = 0$

Nochmal in Graph:



f) $\int_0^{1/2} \sin[2\pi(x+1)]\,dx$ (Substitution: $u = x+1$ $\Rightarrow dx = du$ aber Grenzen ändern sich: $u(0) = 1$, $u(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$)

$= \int_1^{3/2} \sin(2\pi u)\,du = -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\pi u)\right]_1^{3/2}$

$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos(2\cdot\frac{3}{2}\pi) - \cos(2\pi)\right] =$

$= -\frac{1}{2\pi}[-1-1] = \frac{1}{\pi}$

g) $\int_1^{\infty} e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-3x}\right]_1^{\infty} = -\frac{1}{3}\left(\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-3x}}_{=0} - e^{-3}\right) = \frac{1}{3}e^{-3}$

h) $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\cdot\sqrt{x+1}\right]_{-1}^{0} = (2\sqrt{1} - 2\sqrt{0}) = 2$

i) $\displaystyle\int_1^e \frac{[\ln(x)]^2}{x}\,dx$ (Substitution: $u = \ln(x)$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow dx = x\,du$

Grenzen: $u(1) = \ln(1) = 0$

$u(e) = \ln(e) = 1$)

$$= \int_{u(1)}^{u(e)} \frac{u^2}{x}\cdot x\,du = \int_0^1 u^2\,du = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Man kann auch die Grenzen in x behalten, muss dann aber vor dem Einsetzen der Grenzen u(x) rück-einsetzen:

$$= \int_{u(1)}^{u(e)} \frac{u^2}{x}x\,du = \int_{u(1)}^{u(e)} u^2\,du = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_{u(1)}^{u(e)} = \frac{1}{3}\left[\ln(x)\right]_1^e$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln(e) - \ln(1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$$

h) $\displaystyle\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$ (Substitution: $u = 1+3x$

$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3}du$

Grenzen: $u(1) = 4$

$u(5) = 16$)

$$= \int_4^{16} \frac{x}{\sqrt{u}}\frac{1}{3}du \overset{\left[\begin{array}{l} u = 1+3x \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(u-1) \end{array}\right]}{=} \frac{1}{3}\int_4^{16} \frac{\frac{1}{3}(u-1)}{\sqrt{u}}\,du$$

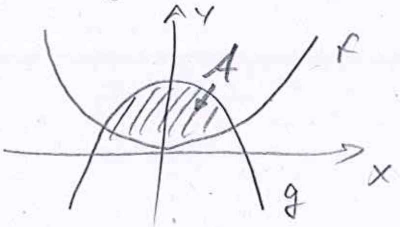
$$= \frac{1}{9}\int_4^{16} \frac{u}{\sqrt{u}} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{9}\int_4^{16} \sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}u^{3/2} - 2\sqrt{u}\right]_4^{16}$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}16\sqrt{16} - 2\sqrt{16} - \frac{1}{3}4\sqrt{4} + 2\sqrt{4}\right) = \frac{100}{27}$$

Aufgabe 3: Fläche zw. Funktionen

$f(x) = x^2, \quad g(x) = 3 - 2x^2$

Skizze:



Schnittpunkte: $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow x^2 = 3 - 2x^2 \Leftrightarrow 3x^2 = 3 \Leftrightarrow \underline{x = \pm 1}$

Fläche zw. den Kurven:

$$\underline{A} = \int_{-1}^{1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} -3x^2 + 3\,dx = -3\int_{-1}^{1} x^2 - 1\,dx = -3\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1}$$

$$= -3\left(\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} - 1\right) = -3\left(-\frac{4}{3}\right) = \underline{4}$$

Aufgabe 4: Variable Integralgrenzen

a) $A(t) = \int_0^t \left(-x^2 + \frac{25}{3}\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{25}{3}x\right]_0^t$

$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{25}{3}t \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow t^3 - 25t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 25) = 0$

$t = 0$ (trivial) $\quad \underline{t = \pm 5}$

b) $A(t) = \int_0^t (5x^4 - 21x^2 + 10)\,dx = [x^5 - 7x^3 + 10x]_0^t$

$= t^5 - 7t^3 + 10t = 0$

$\Leftrightarrow t(t^2 - 5)(t^2 - 2) = 0 \Rightarrow t = 0$ (trivial)

$\underline{t = \pm\sqrt{5}}, \ \underline{t = \pm\sqrt{2}}$

c) $A(t) = \int_0^t \cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[\sin(2\pi x)]_0^t$

$= \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow t = (0,) \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$

Aufgabe 5: Doppelintegrale

a) $$\int_1^2 \left[\int_0^t 2\,dx\right] dt = \int_1^2 [2x]_0^t\,dt = \int_1^2 2t\,dt = [t^2]_1^2 = 3$$

b) $$\int_1^e \left[\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx\right] dt = \int_1^e \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t dt = \int_1^e -\frac{1}{t} + 1\,dt$$

$$= [-\ln(t) + t]_1^e = -1 + e + \ln(1) - 1 = e - 2$$

c) $$\int_\pi^{2\pi} \left[\int_0^t \sin(x)\,dx\right] dt = \int_\pi^{2\pi} [-\cos(x)]_0^t\,dt$$

$$= \int_\pi^{2\pi} -\cos(t) + 1\,dt = [-\sin(t) + t]_\pi^{2\pi} = 2\pi - \pi = \pi$$

Aufgabe 6: Faltung

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt$$

a) $f(t) = t,\ g(t) = t^2$

$$\Rightarrow h(x) = \int_0^x t(x-t)^2\,dt = \int_0^x (t^3 - 2xt^2 + x^2 t)\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}xt^3 + \frac{1}{2}x^2t^2\right]_0^x = \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)x^4 = \frac{1}{12}x^4$$

b) $f(t) = e^{-t},\ g(t) = t$

$$\Rightarrow h(x) = \int_0^x e^{-t}(x-t)\,dt = -\int_0^x \underbrace{t}_{v}\underbrace{e^{-t}}_{u'}\,dt + x\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= [te^{-t}]_0^x - \int_0^x e^{-t}\,dt + x\int_0^x e^{-t}\,dt$$

$$= [te^{-t} + e^{-t} - xe^{-t}]_0^x = e^{-x} - 1 + x$$

c) $f(t) = e^{-at},\ g(t) = e^{-bt}$

$$\Rightarrow h(t) = \int_0^x e^{-at} e^{-b(x-t)}\,dt = e^{-bx}\int_0^x e^{(b-a)t}\,dt = \frac{1}{b-a}e^{-bx}\left[e^{(b-a)t}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{b-a}e^{-bx}\left(e^{bx}e^{-ax} - 1\right) = \frac{1}{b-a}\left(e^{-ax} - e^{-bx}\right)$$