Übungen zur Physik I

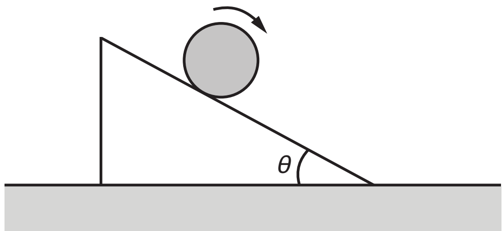
Vorlesung: Prof. Dr. Nikos Doltsinis, Prof. Dr. Helmut Kohl
Übungen: PD Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 11

mündlich: 16. oder 17.12.19
schriftlich: 19. oder 20.12.19

Aufgabe 49: Rolle auf einer schiefen Ebene (7 Punkte, schriftlich)

Ein Zylinder der Masse M und mit Radius R rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene herunter. Der Winkel zwischen der Ebene und der Horizontalen ist θ, das Trägheitsmoment des Zylinders um die Symmetrieachse ist $J = \frac{1}{2} mR^2$ und der Haftreibungskoeffizient zwischen dem Zylinder und der schiefen Ebene ist μ.



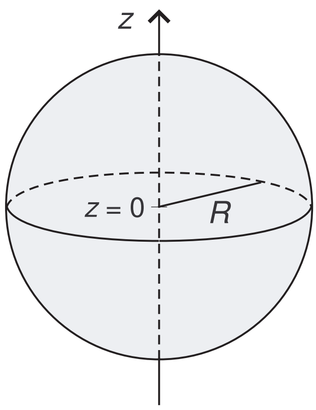
(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle relevanten Kräfte, die die Bewegung des Zylinders bestimmen und zeichnen Sie diese in eine Skizze ein. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Beschleunigung des Zylinders und bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Zylinders am unteren Ende der schiefen Ebene, wenn der Zylinder aus der Ruhe in der Höhe H losgelassen wird.

(c) (2 Punkte) Wie groß ist der maximale Winkel zwischen der schiefen Ebene und der Horizontalen, so dass der Zylinder immer noch ohne zu gleiten rollt?

Aufgabe 50: Schwerpunkt und Trägheitsmoment (10 Punkte, schriftlich)

Gegeben sei eine Kugel mit Radius R. In der oberen Hälfte ändert sich die Massendichte ρ in Abhängigkeit vom Abstand r zum Kugelmittelpunkt, während sie in der unteren Hälfte konstant ist. In Kugelkoordinaten



$$x = r \sin\theta \, \cos\varphi\,, \qquad y = r \sin\theta \, \sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\theta$$

ist die Massendichte durch

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{M}{\pi R^4}\, r & \text{für} \quad 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3M}{4\pi R^3} & \text{für} \quad \dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \pi \end{cases}$$

gegeben.

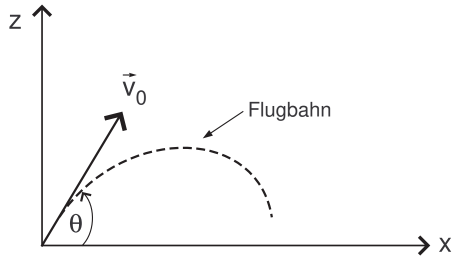
(a) (2 Punkte) Überprüfen Sie mit Hilfe eines Volumenintegrals, dass die Masse der Kugel M ist.

(b) (4 Punkte) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Kugel.

(c) (4 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kugel bzgl. der z-Achse. *Hinweis*: Bei der Integration über θ ist die Substitution $t = \cos\theta$ hilfreich.

Aufgabe 51: Schiefer Wurf mit Reibung **(12 Punkte, mündlich)**

Ein Ball der Masse m wird mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel θ gegen die Horizontale im homogenen Schwerefeld der Erde in x-Richtung abgeworfen. Bei $t = 0$ befindet sich der Ball am Koordinatenursprung. Der Ball unterliegt der Reibungskraft $\vec{F}_r = -\alpha\, \dot{\vec{r}}$.



(a) (3 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $z(t)$ auf und bestimmen Sie die Bahnkurve.

(b) (2 Punkte) Wann erreicht der Ball die maximale Höhe und wie hoch fliegt er?

(c) (2 Punkte) Untersuchen Sie den Fall geringer Reibung ($\alpha \to 0$). Benutzen Sie die Taylorentwicklung

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\,,$$

und entwickeln Sie Ihre Ergebnisse aus (b) in eine Reihe um $\alpha = 0$ und vergleichen Sie diese mit den Ergebnissen für einen schiefen Wurf ohne Reibung.

(d) (3 Punkte) Wie weit fliegt der Ball bei geringer Reibung? Die transzendente Gleichung, die Sie dazu lösen müssten, kann für kleine α (durch Entwicklung um $\alpha = 0$) vereinfacht und gelöst werden. Entwickeln Sie wieder nur bis zur ersten nichttrivialen Ordnung in α. Zeigen Sie, dass der Ball bei gleichem v und θ nicht so weit fliegt, wie im reibungslosen Fall.

(e) (2 Punkte) Muss der Abwurfwinkel für die maximale Reichweite mit Reibung größer oder kleiner sein als $\pi/4$?

Hinweis: Benutzen Sie den Ansatz $x_h(t) = e^{\lambda t}$ oder $x_n(t) = c_1 t + x_h(t)$ um die homogene oder inhomogene Differenzialgleichungen zu lösen.
Im Aufgabenteil (d) benutzen Sie die Entwicklung

$$\sqrt{1 + Ax + Bx^2} = 1 + A\,x + \left(-\frac{A^2}{8} + \frac{B}{2}\right) x^2 + \ldots\,.$$

Aufgabe 52: Komplexe Zahlen **(8 Punkte, schriftlich)**

(a) (2 Punkte) Bilden Sie für die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 4\,i$ und $z_2 = 12 + 5\,i$ die Summe $z_1 + z_2$, die Differenz $z_1 - z_2$, das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten z_1/z_2
Hinweis: Erweitern Sie dazu mit z_2^*.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Betrag, die Phase φ, sowie den Real- und Imaginärteil von

$$z_1 = -i\,, \quad z_2 = 3 + 4\,i\,, \quad z_3 = (1 + i)^3\,, \quad z_4 = \frac{1 + i}{1 - i}\,, \quad z_5 = e^{-i\,\frac{\pi}{4}}\,, \quad z_6 = -e^{i\,\pi}$$

und stellen Sie die Zahlen in der komplexen Zahlenebene ($\widehat{=}$ Gauß'sche Zahlenebene) dar.

(c) (2 Punkte) Leiten Sie die Moivre-Formel

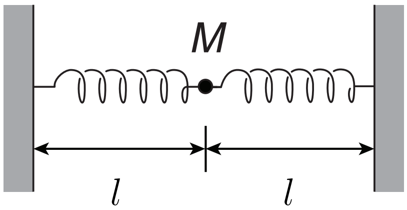
$$z^n = |z|^n\,(\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi)^n = |z|^n\,(\cos\,n\,\varphi + i\,\sin\,n\,\varphi)$$

mit Hilfe der Euler-Formel $\cos\,\varphi + i\,\sin\,\varphi = e^{i\,\varphi}$ ab.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\cos\,(i\,\varphi) = \cosh\,(\varphi)$ und $\sin\,(i\,\varphi) = i\,\sinh\,\varphi$ gilt.

Aufgabe 53: Tensorwirkung einer Feder **(8 Punkte, mündlich)**

Zwei Federn der Längen l_0 und der Federkonstanten D werden am Punkt M aneinandergespannt und um Δl auf die Längen l gedehnt. Wie groß ist die Summe der Spannenergien beider Federn, wenn der Verbindungspunkt M beider Federn



(a) (1 Punkt) um eine Strecke x in Längsrichtung

(b) (1 Punkt) um eine Strecke y in Querrichtung

der Feder ausgelenkt wird?

(c) (2 Punkte) Welche Kräfte müssen für diese Auslenkungen jeweils aufgewandt werden?

(d) (2 Punkte) Durch welchen Tensor

$$\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{pmatrix}$$

wird die Verknüpfung der Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ mit der Auslenkung $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, nämlich $\vec{F} = -\underline{\underline{D}}\,\vec{r}$ beschrieben?

(e) (2 Punkte) In welche Richtung α wird der Punkt M ausgelenkt, wenn eine kleine Kraft $\vec{F}$ unter $45°$ zur Federrichtung angreift? Zahlenwerte: $l_0 = 15\text{cm}$ und $l = 20\text{cm}$.

Hinweis: Nutzen Sie die Potenzreihenentwicklung

$$\sqrt{l^2 + y^2} = l\sqrt{1 + \frac{y^2}{l^2}} \approx l\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{l^2} + \ldots\right)$$

und vernachlässigen Sie durchgängig Terme mit Potenzen von y größer als 2.