Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. Nikos Doltsinis, Prof. Dr. Helmut Kohl
Übungen: PD Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 14

mündlich: 20. oder 21.01.20
schriftlich: 23. oder 24.01.20

Aufgabe 63: Zwei gekoppelte harmonische Oszillatoren **(13 Punkte, schriftlich)**

Zwei identische Massen $m_1 = m_2 = M$ sind zwischen zwei Wänden über drei Federn mit identischen Federkonstanten D eingespannt. Die Bewegung der Massen ist eingeschränkt auf die horizontale x-Achse, x_1 und x_2 seien die Auslenkungen aus der Ruhelage des Systems.

(a) (3 Punkte) Geben Sie an, welche Kräfte auf m_1 bzw. m_2 wirken, wenn das System aus der Ruhelage (wie in der Abbildung skizziert) ausgelenkt ist, und welchen Bewegungsgleichungen die beiden Massen gehorchen.

(b) (3 Punkte) Zur Lösung der Bewegungsgleichungen benutze man den Ansatz: $x_1 = B_1 \cos \omega t$ und $x_2 = B_2 \cos \omega t$, wobei B_1 und B_2 noch zu bestimmende Konstanten sind. Zeigen Sie, dass das Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichungen auf das lineare Gleichungssystem

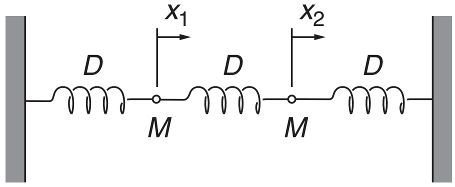
$$\begin{pmatrix} 2D - M\omega^2 & -D \\ -D & 2D - M\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

führt, das nur lösbar ist, wenn die Determinante der Matrix in (1) verschwindet. Berechnen Sie daraus die beiden charakteristischen Oszillationsfrequenzen ω_1 und ω_2 des Systems.

(c) (3 Punkte) Wie lauten die zugehörigen speziellen Lösungen x_1 und x_2 in beiden Fällen und welche Zusammenhänge ergeben sie für B_1 und B_2?

(d) (2 Punkte) Diskutieren Sie die Dynamik der beiden Lösungen, wenn die speziellen Anfangsbedingungen $x_1(0) = -x_2(0)$ oder $x_1(0) = x_2(0)$ gewählt werden.

(e) (2 Punkte) Zur Bestimmung der allgemeinen Lösung ist es nützlich $y_1 = x_1 - x_2$ und $y_2 = x_1 + x_2$ zu betrachten. Schreiben Sie die unter (a) erhaltenen Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2 auf entkoppelte Bewegungsgleichungen für y_1 und y_2 um und geben Sie deren Lösungen an.



Aufgabe 64: Gedämpfter und getriebener Oszillator **(10 Punkte, mündlich)**

Wir betrachten einen gedämpften harmonischen Oszillator, der durch eine periodische äußere Kraft getrieben wird,

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha \sin \bar{\omega} t\,.$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie $x(t)$. Die hier gesuchte allgemeine Lösung $x(t)$ setzt sich aus der homogenen Lösung und der speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung zusammen.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie die Phasenverschiebung $\bar{\varphi}$ der speziellen Lösung als Funktion von $\bar{\omega}$.

(c) (3 Punkte) Sei nun $\beta = \frac{3}{4}\omega_0$ und $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\omega_0$. Berechnen Sie in der allgemeinen Lösung die Amplitude und Phase des homogenen Teils für die Anfangsbedingungen $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$ mit $t_0 = \frac{\pi}{2\omega_0}$. Alle Parameter sind durch ω_0 und α gegeben.

Aufgabe 65: Ameisenscheibe **(7 Punkte, schriftlich)**

Eine Ameise bewegt sich auf einer Kreisscheibe, die sich in der x-y-Ebene um ihre Mitte mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ dreht. Aus der Sicht der Ameise bewegt sie sich geradlinig aus der Mitte der Scheibe nach außen mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}\,' = v'\vec{e}\,'_x$.

(a) (2 Punkte) Geben Sie alle Kräfte an, die im Bezugssystem der rotierenden Scheibe auf die Ameise wirken.

(b) (3 Punkte) Ermitteln Sie die Form der Bahnkurve in zwei Bezugssystemen. Zunächst in dem Bezugssystem, in dem sich die Scheibe nicht bewegt und dann auch im Bezugssystem, in dem sich die Scheibe mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ dreht.

(c) (2 Punkte) Nehmen Sie jetzt an, dass die Reibung zwischen den Beinen der Ameise und der Scheibe durch einen statischen Reibungskoeffizient μ_S gegeben ist. Wie weit kann sich die Ameise von der Mitte entfernen bevor sie anfängt zu rutschen?

Aufgabe 66: Ball auf Karussell **(8 Punkte, mündlich)**

Sie sitzen mit einem Ball auf einem flachen Kinderkarussell. Zur Zeit $t = 0$ befinden Sie sich im Ruhesystem des Karussells S' am Punkt $\vec{r}(0) = (R, 0)$, wobei der Mittelpunkt des Karussells der Koordinatenursprung ist. Das Karussell dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ um seinen Mittelpunkt. Im Folgenden betrachten wir auch das Inertialsystem S, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt des Karussells zusammenfällt.

(a) (2 Punkte) Mit welchem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}\,' = (v_1, v_2)$ müssen Sie einen Ball zur Zeit $t = 0$ in S' anstoßen, wenn die Geschwindigkeit in S nur eine Komponente in Richtung des Mittelpunktes haben soll, $\vec{v} = (-v, 0)$? Dies sei die Anfangsbedingung für alle folgenden Teilaufgaben.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ im Inertialsystem S und im Karussellsystem S'.

(c) (1 Punkt) Zu welchem Zeitpunkt t_0 nach dem Anstoß erreicht der Ball wieder den Radius R?

(d) (2 Punkte) In dem Karussell sitzen nun auch Ihre zwei Freunde A und B. Beide haben den gleichen Abstand zum Zentrum R, sind jedoch um $\varphi_A = \pi/2$ (rechts von Ihnen) bzw. $\varphi_B = \pi$ von Ihnen entfernt. Wie muss v jeweils gewählt werden, damit Sie mit Ihrem Ball A bzw. B treffen (die einfachste Lösung reicht)?

(e) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Bahnkurven aus Teil (d) in den Bezugssystemen S und S'.