Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. Nikos Doltsinis, Prof. Dr. Helmut Kohl
Übungen: PD Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 5

mündlich: 04. oder 05.11.19
schriftlich: 07. oder 08.11.19

Aufgabe 16: Bahnkurve: Zykloide **(10 Punkte, schriftlich)**

Ein Rad mit dem Radius R rollt auf einer Geraden in der x-Richtung. Wir betrachten einen Ventil am Rand des Rades, das sich bei $\varphi = 0$ genau unterhalb des Mittelpunktes des Rades befindet.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass sich die Bahnkurve des Ventil als

$$\vec{r}(t) = R\Big(\varphi(t) - \sin\varphi(t), 1 - \cos\varphi(t))\Big)$$

schreiben lässt. Dabei ist R konstant.

Hinweis: Die Bewegung des Ventils kann man sich als eine Bewegung, zusammengesetzt aus einer Bewegung des Mittelpunktes und einer relativen Drehung des Ventils, vorstellen.

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_M(t) + \vec{r}_{\text{rel}}(t)$$

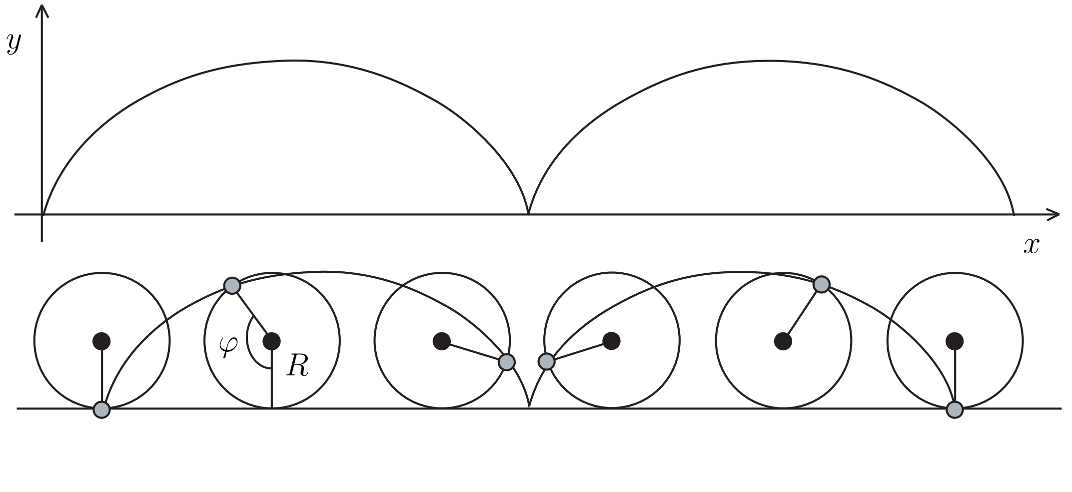
Wie hängt die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Rades mit der Geschwindigkeit des Mittelpunktes in der x-Richtung zusammen, wenn das Rad nicht gleitet sondern rollt?

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie jetzt eine Bewegung bei der das Rad mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit rollt d.h. $\varphi(t) = \omega t$ wobei ω konstant ist. Berechnen Sie für diese Bewegung $\vec{v}\,(t)$, $|\vec{v}\,(t)|$, $\vec{a}\,(t)$ und $|\vec{a}\,(t)|$.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie die Länge der Kurve $s(t)$ vom Punkt $t_1 = 0$ bis zum Punkt $t_2 = \dfrac{2\pi}{\omega}$,

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Tangentialvektor $\vec{e}_T$ und den Normalenvektor $\vec{e}_N$ und drücken Sie $\vec{a}\,(t)$ über $\vec{e}_N$ und $\vec{e}_T$ aus.

(e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Krümmung κ und den Krümmungsradius ρ.

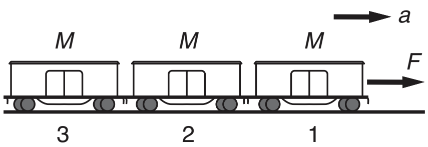


Hinweis: Die folgende Relation zwischen Sinus und Kosinus könnte Ihnen, neben anderen Sinus-Kosinus-Relationen, beim Lösen dieser Aufgabe helfen:

$$\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

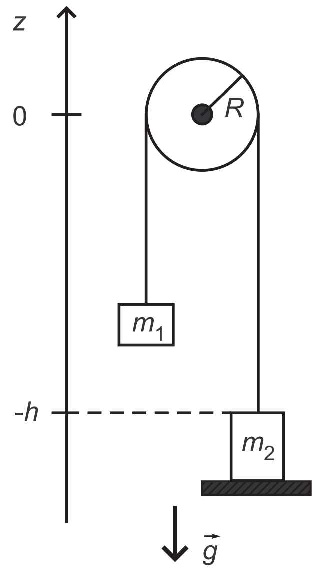
Aufgabe 17: Kräfte auf Waggons (4 Punkte, mündlich)

Drei gleiche Waggons der Masse M werden von einer Lokomotive mit der Kraft F gezogen. Wie groß sind die Kräfte, die auf jeden Waggon wirken? Vernachlässigen Sie die Reibung.



Aufgabe 18: Atwood'sche Fallmaschine (6 Punkte, mündlich)

Zwei Massen m_1 und m_2 ($m_2 > m_1$) sind mit einem Seil der Länge l, welches reibungsfrei über eine Rolle mit dem Radius R geführt wird, fest miteinander verbunden. Die Anordnung befindet sich im Schwerefeld der Erde, wobei die Masse m_2 zunächst durch eine Arretierung in der Höhe $-h$ festgehalten wird. Zur Zeit $t = 0$ wird die Arretierung gelöst. Sehen Sie das Seil als masselos an.



(a) (1 Punkt) Welche Kräfte wirken auf die Massen m_1 und m_2 nachdem die Arretierung gelöst wurde? Zeichnen Sie diese in die Grafik ein.

(b) (3 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für m_1 und m_2 auf. Entkoppeln Sie die über die Seilkraft verknüpften Gleichungen. Lösen Sie die resultierenden Bewegungsgleichungen.

Hinweis: Im Teil (b) soll die Tatsache ausgenutzt werden, dass die Länge des Seils konstant ist. Dies führt zu einer Beziehung zwischen den Beschleunigungen der beiden Massen.

Aufgabe 19: Wegintegrale und Arbeit (6 Punkte, schriftlich)

(a) (3 Punkte) Ein Massepunkt bewegt sich im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = A\,r\,\vec{r}$ (mit $A = \text{const.}$). Berechnen Sie die Arbeit für eine Bewegung von $\vec{r}_a = (-1,\,0,\,0)$ nach $\vec{r}_b = (1,\,0,\,0)$ entlang der Wege C_1 bzw. C_2. Dabei seien die Wege wie folgt gegeben:

$$C_1: \quad (x,\,0,\,0) \qquad \text{mit} \quad -1 \le x \le 1$$

$$C_2: \quad (-\cos\omega t,\,\sin\omega t,\,0) \qquad \text{mit} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega}\,.$$

(b) (3 Punkte) Führen Sie die Berechnung aus Teil (a) für eine Bewegung im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = (-A\,y,\,A\,x,\,0)$ durch.

Aufgabe 20: Partielle Ableitungen **(6 Punkte, schriftlich)**

Bestimmen Sie jeweils die ersten partiellen Ableitungen nach x, y und gegebenenfalls auch z für folgende Funktionen:

(a) $f(x, y) = 3x^2y^4 + 7x^7 + 5y^5$

(b) $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x - y}$

(c) $f(x, y, z) = \sin(x) \cdot \cos(z)$

(d) $f(x, y, z) = \ln(xy) + xz^4 - \dfrac{z}{y^3}$

(e) (2 Punkte) Berechnen Sie die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

für die Funktion $f(x, y)$ aus Aufgabenteil (b).

Aufgabe 21: Tour Montparnasse **(5 Punkte, mündlich)**

Für den Tour Montparnasse (http://www.tourmontparnasse56.com) in Paris wird mit folgenden Angaben geworben:

- Von der Panoramadachterrasse (210 m hoch) können Sie bei klarem Wetter 40 km weit sehen.
- In nur 38 s bringt Sie der schnellste Aufzug Europas in 196 m Höhe.

(a) (2 Punkt) Wie weit kann man bei klarem Wetter sehen, wenn die Sicht nur durch die Erdkrümmung begrenzt wird (Erdradius $r_E = 6370$ km)?

(b) (3 Punkte) Wir nehmen an, dass der Aufzug während der ersten Hälfte der Fahrzeit konstant mit a_0 beschleunigt. Danach wird er mit $-a_0$ abgebremst. Welche Beschleunigung a_0 muss man dem Benutzer zumuten, um die versprochene Zeit von 38 s einhalten zu können? Vergleichen Sie diesen Wert mit der Erdbeschleunigung! Wie groß ist die größte Geschwindigkeit während der Auffahrt? Skizzieren Sie den Bewegungsverlauf im Beschleunigungs-Zeit-, Geschwindigkeits- Zeit- und Weg-Zeit-Diagramm.