Übungen zur Physik I

Vorlesung: Prof. Dr. Nikos Doltsinis, Prof. Dr. Helmut Kohl
Übungen: PD Dr. Karol Kovařík, Dr. Lew Classen

Blatt 9

mündlich: 02. oder 03.12.19
schriftlich: 05. oder 06.12.19

Aufgabe 39: Kugelkoordinaten **(7 Punkte, mündlich)**

In kartesischen Komponenten lautet ein beliebiger Vektor $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$, ausgedrückt durch die Kugelkoordinaten r, θ, φ,

$$\vec{r}(r,\theta,\varphi) = r\,(\cos\varphi\,\sin\theta,\,\sin\varphi\,\sin\theta,\,\cos\theta)\ .$$

Hält man jeweils zwei der Kugelkoordinaten fest, so erhält man die Koordinatenlinie der dritten Koordinate als parametrisierte Kurve mit der jeweils dritten Koordinate als Parameter, z.B. für die r-Koordinatenlinien

$$\vec{r}\,(r) = \vec{r}\,(r,\,\theta = \text{const},\,\varphi = \text{const})\,.$$

An jedem Punkt $\vec{r}$ gibt es nun drei Koordinatenrichtungen $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, die durch die Tangentialvektoren der Koordinatenlinien gegeben sind.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Vektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Orthonormalsystem bilden.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ ein Rechtssystem bilden.

(d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass sich in den Kugelkoordinaten, in denen der Ortsvektor als $\vec{r} = r\,\vec{e}_r$ geschrieben werden kann, die Geschwindigkeit als

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

und die Beschleunigung als

$$\begin{aligned}\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta\right]\vec{e}_r \\ &+ \left[r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right]\vec{e}_\varphi \\ &+ \left[r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\right]\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

darstellen lassen.

Aufgabe 40: Schwerpunkt und Trägheitsmoment eines dünnen Stabs
(10 Punkte, schriftlich)

Die Masse eines dünnen Stabs der Länge L sei folgendermaßen verteilt

$$\rho(x) = \frac{M}{2L} + \frac{M}{L^2}\,x\,, \qquad x \in (0,L)\,.$$

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Masse des Stabs M ist.

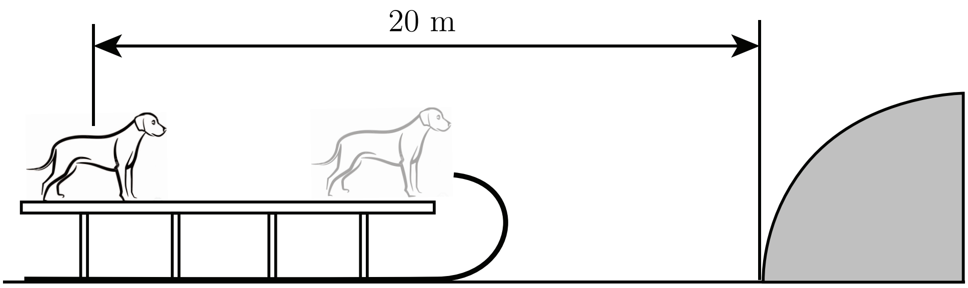
(b) (2 Punkte) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Stabs.

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Stabs bezüglich einer Achse, die durch die Mitte des Stabs und senkrecht zum Stab verläuft.

(d) (4 Punkte) Berechnen Sie die Trägheitsmomente des Stabs bezüglich der Achsen, die durch die Endpunkte des Stabs und senkrecht zum Stab verlaufen.

Aufgabe 41: Ein Hund auf einem Schlitten **(7 Punkte, mündlich)**

Ein 120 kg schwerer Schlitten ruht auf der Oberfläche eines zugefrorenen Sees. Ein großer Hund (50 kg) steht auf einem Ende des Schlittens, wobei er 20 m vom Ufer entfernt ist. Danach läuft der Hund 3 m auf dem Schlitten in Richtung Ufer (Distanz relativ zum Schlitten) und hält an. Bestimmen Sie, wie weit der Hund am Ende vom Ufer entfernt ist. Nehmen Sie an, dass sich der Schlitten auf dem See ohne Reibung bewegt.



Aufgabe 42: Offene Flugbahn im Gravitationsfeld **(10 Punkte, schriftlich)**

Ein Körper mit der Masse m bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{m\,M\,G}{r^3}\,\vec{r}\ ,$$

im Schwerefeld einer Masse M, die im Ursprung des Koordinatensystems ruht. G ist die Gravitationskonstante. Zur Zeit $t = 0$ befindet er sich bei $\vec{r}_0 = (r_0,\, 0,\, 0)$ und hat die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0,\, v_0,\, 0)$.

(a) (4 Punkte) Geben Sie die Bahnparameter k und ε in Abhängigkeit von r_0 und v_0 an. Wie groß muss v_0 bei vorgegebenem r_0 mindestens sein, damit die Flugbahn nicht geschlossen ist? Welche Form hat die Bahnkurve in diesem Fall?

(b) (6 Punkte) Nun beträgt die Anfangsgeschwindigkeit

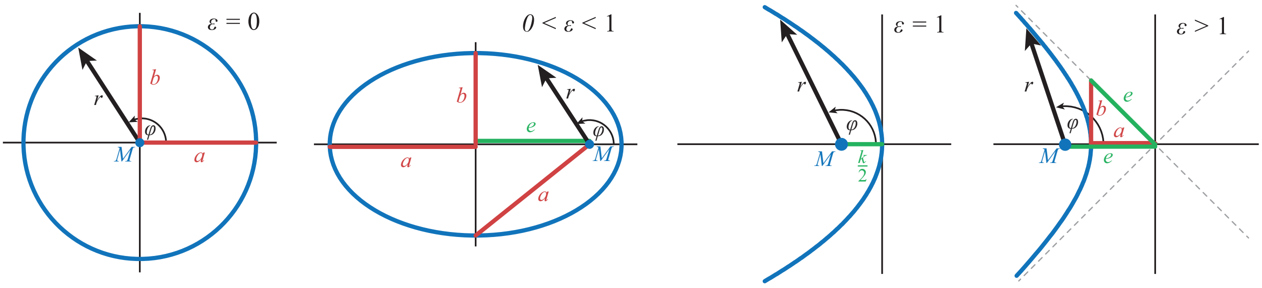
$$v_0 = 2\sqrt{\frac{M\,G}{r_0}}\ .$$

Welche Form hat die Bahnkurve? Geben Sie $r(\varphi)$ an. In welchem Abstand vom Kraftzentrum schneidet die Flugbahn des Körpers die y-Achse? Unter welchem Winkel φ relativ zur positiven x-Achse bewegt sich der Körper für $r \to \infty$? Skizzieren Sie die Bahnkurve.

Hinweis: Bei einer Kepler-Bahn gilt:

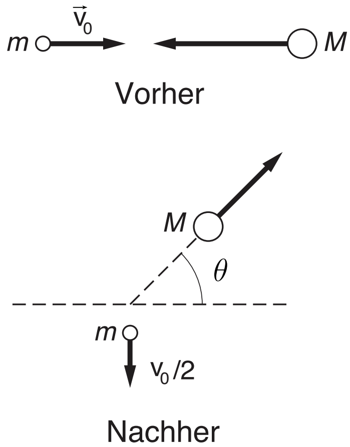
$$k = \frac{L^2}{m^2\,GM}\ , \qquad \varepsilon = \frac{e}{a} = \sqrt{1 + \frac{2E\,k}{mM\,G}}\,,$$

wobei L der Drehimpuls, E die Energie, ε die relative Exzentrizität und G die Gravitationskonstante ist. Die Größen a und e können für verschiedene Fälle der nachfolgenden Skizze entnommen werden.



Aufgabe 43: Elastischer Stoß **(6 Punkte, mündlich)**

Ein Teilchen (Masse m) mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ kollidiert mit einem Teilchen einer unbekannten Masse M, das in die entgegengesetzte Richtung fliegt. Nach einem elastischen Stoß bewegt sich das Teilchen der Masse m orthogonal zu der ursprünglichen Bewegungsrichtung mit einer Geschwindigkeit $|\vec{v}\,'_1| = |\vec{v}_0|/2$. Das andere Teilchen bewegt sich nach dem Stoß unter einem Winkel $\theta = 45°$ zu der ursprünglichen Bewegungsrichtung (siehe Abbildung).



(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie zuerst das Massenverhältnis M/m.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Masse M vor und nach dem Stoß (als Funktion von $v_0 = |\vec{v}_0|$).

Bemerkung: Setzen Sie den Wert für den Winkel θ erst ganz am Ende der Rechnung ein.

Nachricht von der Fachschaft

Bald ist Nikolaus! Mach deinen Lieblingskommilitonen eine kleine Freude und schenke ihnen einen Schokonikolaus mit Grußkärtchen. (In der Fachschaft Physik bis zum 3.12.)