1. Übung zur Quantheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 08.10.2019, Abgabe: 15.10.2019

WWU

Aufgabe 1: Spin-Matrizen **[7 Punkte]**

In der Vorlesung haben Sie die Darstellung der Spin-Operatoren durch (2×2)-Matrizen (Pauli'sche Spin-Matrizen) kennengelernt. Verwenden Sie diese Matrizen bei der Lösung dieser Aufgabe.

a) [2P] Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{S}_y, \hat{S}_z]$.

b) [1P] Berechnen Sie den Erwartungswert

$$\langle \hat{S}_x \rangle_t = \langle \phi(t) | \hat{S}_x | \phi(t) \rangle \, ,$$

wobei die Spinwellenfunktion (Spinor) durch

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

c) [4P] Ein Elektron befinde sich in einem Magnetfeld

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} (B, B, 0) \, .$$

Berechnen Sie die Energien E und die zugehörigen Eigenzustände der stationären Schrödingergleichung

$$\hat{H} \tilde{\phi} = E \tilde{\phi} \qquad \text{mit} \qquad \hat{H} = \frac{g\,e}{2\,m_e} \vec{B} \hat{\vec{S}} \, .$$

Aufgabe 2: Spinerwartungswert in Kugelkoordinaten **[6 Punkte]**

a) [2P] Berechnen Sie den Erwartungswert des Spinoperators

$$\langle \hat{\vec{S}} \rangle = \langle \phi | \hat{\vec{S}} | \phi \rangle \qquad \text{für den Spinor} \qquad \phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \, .$$

Verwenden Sie bei der Rechnung wieder die Pauli'schen Spin-Matrizen.

b) [2P] Die Richtung des Vektors $\langle \hat{\vec{S}} \rangle$ lässt sich in Kugelkoordinaten mit Hilfe der Winkel ϑ und φ ausdrücken. Zeigen Sie, dass ein Spinor mit

$$a = \cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \qquad \text{und} \qquad b = \sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \mathrm{e}^{i\varphi}$$

auf

$$\langle \hat{\vec{S}} \rangle = \frac{\hbar}{2} (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$$

führt.

c) [2P] Geben Sie für

$$\text{i)} \quad \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \left(\frac{\hbar}{2}, 0, 0\right) , \qquad \text{ii)} \quad \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \left(0, \frac{\hbar}{2}, 0\right) ,$$

$$\text{iii)} \quad \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \left(0, 0, \frac{\hbar}{2}\right) , \qquad \text{iv)} \quad \langle \hat{\vec{S}} \rangle = \left(0, 0, -\frac{\hbar}{2}\right)$$

die zugehörigen Spinoren an.

Aufgabe 3: Geschwindigkeitsoperator **[7 Punkte]**

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung Q bewege sich unter dem Einfluss eines elektromagnetischen Feldes mit Vektorpotential $\vec{A}\,(\vec{r},\,t)$ mit skalarem Potential $\Phi\,(\vec{r},\,t)$. Der Hamiltonoperator des Systems lautet

$$\hat{H} \;=\; \frac{1}{2\,m}\,(\vec{p} \,-\, Q\,\vec{A}\,(\vec{r},\,t))^2 \,+\, Q\,\Phi\,(\vec{r},\,t)$$

und der Geschwindigkeitsoperator ist durch

$$\hat{\vec{v}} \;=\; \frac{i}{\hbar}\,[\hat{H},\,\hat{\vec{r}}\,] \;=\; \frac{1}{m}\,(\hat{\vec{p}} \,-\, Q\,\vec{A}\,(\vec{r},\,t))$$

gegeben.

a) [3P] Bestimmen Sie die Vertauschungsrelationen $[\hat{v}_x,\,\hat{v}_y]$, $[\hat{v}_y,\,\hat{v}_z]$ und $[\hat{v}_z,\,\hat{v}_x]$.

b) [3P] Berechnen Sie die zeitliche Änderung des Erwartungswertes der Geschwindigkeit

$$\frac{d}{d\,t}\,\langle\hat{\vec{v}}\,\rangle_t \;=\; \frac{i}{\hbar}\,\big\langle[\hat{H},\,\hat{\vec{v}}\,]\big\rangle_t \,+\, \Big\langle\frac{\partial}{\partial\,t}\,\hat{\vec{v}}\Big\rangle_t\;.$$

Berechnen Sie dazu zunächst $[\hat{v}^2,\,\hat{\vec{v}}\,]$. Stellen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des elektrischen Feldes $\vec{E}\,(\vec{r},\,t)$ und des Magnetfeldes $\vec{B}\,(\vec{r},\,t)$ dar.

c) [1P] Zeigen Sie, dass im Fall von homogenen $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feldern

$$m\,\frac{d}{d\,t}\,\langle\hat{\vec{v}}\,\rangle_t \;=\; Q\,(\vec{E}\,(t) \,+\, \langle\hat{\vec{v}}\,\rangle_t \,\times\, \vec{B}\,(t))$$

gilt.