12. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 07.01.2020, Abgabe: 14.01.2020

WWU

Aufgabe 31: Lebensdauer [6 Punkte]

Ein Wasserstoffatom befinde sich im Zustand $|\varphi_j\rangle$. Durch spontane Emission geht das Atom nach einer charakteristischen Zeit $\tau = \dfrac{1}{A_{j\to f}}$ in den Grundzustand über. Dabei ist $A_{j\to f}$ der Einsteinkoeffizient.

Berechnen Sie die Lebensdauer τ für den Übergang von $|\varphi_{210}\rangle$ nach $|\varphi_{100}\rangle$.

Geben Sie die Lebensdauer τ in Sekunden an.

Aufgabe 32: Auswahlregel für Drehimpulsquantenzahlen [6 Punkte]

Zeigen Sie, dass für atomare Dipolübergänge zwischen den Niveaus $|n\,l\,m\rangle$ und $|n'\,l'\,m'\rangle$ die Auswahlregel $\Delta\, l = \pm 1$ erfüllt sein muss (ohne Berücksichtigung der Spin-Bahn-Wechselwirkung). Werten Sie dazu das Matrixelement

$$\langle \varphi_{n\,l\,m}|\vec{r}\,|\varphi_{n'\,l'\,m'}\rangle := \langle n\,l\,m|\vec{r}\,|n'\,l'\,m'\rangle$$

aus. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) [2P] Betrachten Sie zunächst den Fall $l = l' = 0$. Beachten Sie dabei, dass die Wellenfunktionen $\varphi_{n00}\,(\vec{r}\,)$ und $\varphi_{n'00}\,(\vec{r}\,)$ nur von $|\vec{r}\,|$ abhängen.

b) [4P] Berechnen Sie dann mit Hilfe der Operatoridentität

$$\left[\hat{\vec{L}}^{\,2},\, \left[\hat{\vec{L}}^{\,2},\, \vec{r}\,\right]\right] = 2\,\hbar^2\,\left(\hat{\vec{L}}^{\,2}\,\vec{r} + \vec{r}\,\hat{\vec{L}}^{\,2}\right)$$

einen Ausdruck der Form

$$f\,(l,\, l')\,\langle n\,l\,m|\vec{r}\,|n'\,l'\,m'\rangle = 0\ .$$

Dabei ist $f\,(l,\, l')$ ein Vorfaktor, der nur von l und l' abhängt. Zeigen Sie, dass sich $f\,(l,\, l')$ schreiben lässt als:

$$f\,(l,\, l') = \left\{(l + l' + 1)^2 - 1\right\}\,\left\{(l - l')^2 - 1\right\}\ .$$

Zeigen Sie dann, dass die Auswahlregel $\Delta\, l = \pm 1$ gelten muss.

Aufgabe 33: Resonante Übergänge beim harmonischen Oszillator [6 Punkte]

Ein isotroper harmonischer Oszillator mit Masse m, Eigenfrequenz ω_0 und Ladung Q befinde sich in einem Strahlungsfeld

$$\vec{A}\,(\vec{r},\, t) = A_0\,\vec{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t)} + A_0^*\,\vec{\mathcal{E}}\,\mathrm{e}^{-i\,(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\, t)}$$

mit $\vec{\mathcal{E}} = (1,\, 0,\, 0)$ und $\vec{k} = (0,\, k,\, 0)$.

a) [2P] Der Oszillator hat die Eigenzustände

$$|\varphi_{n_x,\, n_y,\, n_z}\rangle := |n_x,\, n_y,\, n_z\rangle = |n_x\rangle\,|n_y\rangle\,|n_z\rangle\ .$$

Entsprechend gibt es Auf- und Absteigeoperatoren a_x^+, a_x bzw. a_y^+, a_y bzw. a_z^+, a_z. Geben Sie die Eigenenergien an.

Berechnen Sie $\hat{p}_x\,|n_x,\, n_y,\, n_z\rangle$ und $y\,|n_x,\, n_y,\, n_z\rangle$. Stellen Sie dazu den Impuls- und den Ortsoperator durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar.

b) [4P] Welche resonanten Übergänge vom Grundzustand in einen angeregten Zustand sind möglich, wenn die Strahlung die Frequenz $\omega = \omega_0$ oder $\omega = 2\,\omega_0$ hat?

Berechnen Sie dazu die jeweilige Übergangsrate Γ. Gehen Sie dabei über die Dipolnäherung hinaus und verwenden Sie

$$\mathrm{e}^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1 + i\,\vec{k}\cdot\vec{r}\,.$$

Aufgabe 34: Bewegungsgleichung für Operatoren im Heisenberg-Bild [2 Punkte]

Ein Operator $\hat{O}$ (Schrödinger-Bild) hat im Heisenberg-Bild die Form

$$\hat{O}_H\,(t) \;=\; \hat{T}^+\,(t,\,t_0)\,\hat{O}\,\hat{T}\,(t,\,t_0)\;.$$

Dabei ist $\hat{T}\,(t,\,t_0)$ der Zeitentwicklungsoperator, wobei

$$i\,\hbar\,\frac{d}{d\,t}\,\hat{T}\,(t,\,t_0) \;=\; \hat{H}\,\hat{T}\,(t,\,t_0)$$

gilt.

Zeigen Sie, dass $\hat{O}_H\,(t)$ folgende Bewegungsgleichung erfüllt:

$$\frac{d}{d\,t}\,\hat{O}_H\,(t) \;=\; \frac{1}{i\,\hbar}\,\left[\hat{O}_H\,(t),\,\hat{H}_H\,(t)\right] + \underbrace{\hat{T}^+\,(t,\,t_0)\,\left(\frac{d}{d\,t}\,\hat{O}\right)\,\hat{T}\,(t,\,t_0)}_{:=\;\frac{\partial}{\partial\,t}\,\hat{O}_H\,(t)}\;.$$