13. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 14.01.2020, Abgabe: 21.01.2020

WWU

Aufgabe 35: Harmonischer Oszillator im Heisenberg-Bild [6 Punkte]

a) [2P] Stellen Sie die Bewegungsgleichung eines klassischen, harmonischen Oszillators der Masse m und der Frequenz ω auf und lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen

$$x\,(t\,=\,0)\,=\,x\,(0) \qquad \text{und} \qquad m\,\dot{x}\,(t\,=\,0)\,=\,p\,(0)\ .$$

Geben Sie $x\,(t)$ und $p\,(t)$ an.

b) [4P] Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit des Orts- und Impulsoperators für den eindimensionalen harmonischen Oszillator im Heisenberg-Bild. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Ergebnis für den klassischen harmonischen Oszillator aus a).

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Zeitverhalten von $\hat{a}_H\,(t)$ und $\hat{a}_H^+\,(t)$.

Aufgabe 36: Wechselwirkungsbild [7 Punkte]

Für ein System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}\,(t)\,=\,\hat{H}^{(0)}\,+\,\hat{U}\,(t)$$

erhält man im Wechselwirkungsbild in erster Ordnung Störungstheorie die Zustände

$$|\psi_w\,(t)\rangle\,=\,|\psi_w\,(t_0)\rangle\,+\,\frac{1}{i\,\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\hat{U}_w\,(t')\,d\,t'\,|\psi_w\,(t_0)\rangle\ .$$

Betrachten Sie erneut das Zweiniveausystem aus Aufgabe 4 mit

$$\hat{H}^{(0)}\,=\,\frac{\hbar\,\omega_0}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \hat{U}\,(t)\,=\,\frac{-\hbar\,\omega_1}{2}\begin{pmatrix}0 & e^{-i\,\omega\,t}\\ e^{i\,\omega\,t} & 0\end{pmatrix}$$

und der Anfangszeit $t_0\,=\,0$.

a) [3P] Berechnen Sie $U_w\,(t)$. Nutzen Sie dabei aus, dass

$$e^{-i\,\alpha\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}}\,=\,\begin{pmatrix}e^{-i\,\alpha} & 0\\ 0 & e^{i\,\alpha}\end{pmatrix}$$

gilt. Begründen Sie diese Relation.

b) [2P] Berechnen Sie $|\psi_w\,(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung

$$|\psi_w\,(0)\rangle\,=\,|\psi\,(0)\rangle\,=\,\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ .$$

c) [2P] Bestimmen Sie den Zustand

$$|\psi\,(t)\rangle\,=\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\hat{H}^{(0)}\,t}\,|\psi_w\,(t)\rangle\ .$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich das System im Zustand $\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Resultat der exakten Rechnung aus Aufgabe 4.

Aufgabe 37: Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes [7 Punkte]

Der Impulsoperator des elektromagnetischen Feldes ist durch

$$\hat{\vec{P}}_{\text{Feld}} = \mathcal{E}_0 \int\limits_V \left(\hat{\vec{E}}\,(\vec{r},\,t) \times \hat{\vec{B}}\,(\vec{r},\,t) \right) d^3\,r$$

gegeben.

Stellen Sie $\hat{\vec{E}}$ und $\hat{\vec{B}}$ mit Hilfe der in der Vorlesung eingeführten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren dar und zeigen Sie, dass

$$\hat{\vec{P}}_{\text{Feld}} = \sum_{\vec{k},\,\alpha} \hbar\,\vec{k}\,\hat{a}^{+}_{\vec{k},\,\alpha}\,\hat{a}_{\vec{k},\,\alpha}$$

gilt.

Hinweis:

$$\sum_{\vec{k}} \vec{k}\,\hat{a}_{\vec{k},\,\alpha}\,\hat{a}_{-\vec{k},\,\alpha} = 0\ , \qquad \sum_{\vec{k}} \vec{k}\,\hat{a}^{+}_{\vec{k},\,\alpha}\,\hat{a}^{+}_{-\vec{k},\,\alpha} = 0\ .$$

Nützliche Identität:

$$\vec{c} \times \left(\vec{d} \times \vec{f}\right) = \vec{d}\left(\vec{c}\cdot\vec{f}\right) - \vec{f}\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\ .$$