2. Übung zur Quantheorie [Krüger, WS 2019/20]

Ausgabe: 15.10.2019, Abgabe: 22.10.2019

WWU

Aufgabe 4: Kernspinresonanz [14 Punkte]

Ein Proton mit der Masse m_p befinde sich in einem statischen Magnetfeld $\vec{B}_0 = (0, 0, -B_0)$, dem ein zirkularpolarisiertes Wechselfeld $\vec{B}_1 = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, 0)$ überlagert ist. Die Spinwellenfunktion des Protons

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

genügt der Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(t) = \hat{H}(t)\, \phi(t)$$

mit

$$\hat{H}(t) = -\frac{g_p e}{2 m_p} \vec{B}(t) \cdot \hat{\vec{S}} ,$$

wobei g_p der Landé-Faktor des Protons ist.

a) [3P] Zeigen Sie, dass diese Schrödingergleichung äquivalent zu

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a(t) \\ \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & -\omega_1 e^{-i\omega t} \\ \\ -\omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ \\ b(t) \end{pmatrix}$$

ist, wobei

$$\omega_0 = g_p \frac{e}{2 m_p} B_0$$

und

$$\omega_1 = g_p \frac{e}{2 m_p} B_1$$

sind.

b) [3P] Geben Sie für den Fall $B_1 = 0$ die zugehörige stationäre Schrödingergleichung an und berechnen Sie deren Eigenwerte und Eigenfunktionen.

c) [4P] Zeigen Sie, dass das Differentialgleichungssystem aus a) durch den Ansatz

$$a(t) = \tilde{a}\, e^{-i\frac{\omega}{2}t}\, e^{i\Omega t}$$

und

$$b(t) = \tilde{b}\, e^{i\frac{\omega}{2}t}\, e^{i\Omega t}$$

gelöst wird, wobei $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ komplexe Zahlen sind. Berechnen Sie die möglichen Werte von Ω.

d) [4P] Betrachten Sie den Fall, dass die Frequenz des Magnetfeldes $\vec{B}_1$ gleich ω_0 ist. Berechnen Sie $a(t)$, $b(t)$ und die Erwartungswerte $\langle \hat{S}_z \rangle_t$ und $\langle \hat{H} \rangle_t$ für die Anfangsbedingungen $a(0) = 0$ und $b(0) = 1$. Skizzieren Sie $|a(t)|^2$ und $\langle \hat{S}_z \rangle_t$.

Aufgabe 5: Wahrscheinlichkeitsstromdichte [6 Punkte]

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m und Ladung Q, das sich unter dem Einfluss eines elektromagnetischen Feldes bewegt, lautet:

$$\hat{H} = \frac{1}{2\,m}\left(\hat{\vec{p}} - Q\,\vec{A}\,(\vec{r},\,t)\right)^2 + Q\,\phi\,(\vec{r},\,t)\ ,$$

wobei $\vec{A}\,(\vec{r},\,t)$ und $\phi\,(\vec{r},\,t)$ reell sind.

Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho\,(\vec{r},\,t) = |\psi\,(\vec{r},\,t)|^2$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\,\rho}{\partial\,t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0$$

erfüllt, wobei

$$\vec{J} = \frac{1}{2\,m}\left(\frac{\hbar}{i}\left(\psi^*\,\vec{\nabla}\,\psi - \psi\,\vec{\nabla}\,\psi^*\right) - 2\,Q\,\vec{A}\,\psi^*\,\psi\right)$$

die Wahrscheinlichkeitsstromdichte ist.

Berechnen Sie dazu $\operatorname{div}\vec{J}$ und bestimmen Sie $\dfrac{\partial\,\rho}{\partial\,t}$ mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

(Nützliche Relationen für Funktionen $f\,(\vec{r}\,)$ und $g\,(\vec{r}\,)$ sowie eine Vektorfunktion $\vec{a}\,(\vec{r}\,)$:

$$\operatorname{div}(\vec{a}\,f) = f\operatorname{div}\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{\nabla}\,f\ , \qquad \vec{\nabla}\,(f\,\cdot\,g) = f\,\vec{\nabla}\,g + g\,\vec{\nabla}\,f\ )\ .$$