3. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 22.10.2019, Abgabe: 29.10.2019

Aufgabe 6: Einfluss der endlichen Kernausdehnung beim H-Atom [7 Punkte]

Die Ladungsverteilung eines Atomkerns ist nicht punktförmig. Wir nehmen an, dass sie durch folgende homogene Ladungsverteilung gegeben ist:

$$\rho_K(r) = \begin{cases} \dfrac{Z\,e}{\frac{4\pi}{3} R^3} & \text{für} \quad r \le R \\ 0 & \text{für} \quad r > R \end{cases}$$

mit $R = r_0\,A^{1/3}$, wobei A die Massenzahl des Kerns ist und $r_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ der Nukleonenradius sei. Zu dieser Ladungsverteilung gehört folgendes Potential $\tilde{V}(r) = -e \cdot \Phi_K(r)$:

$$\tilde{V}(r) = -\frac{Z\,e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{3\,R^2 - r^2}{2\,R^3} & \text{für} \quad r \le R \\ \dfrac{1}{r} & \text{für} \quad r > R \end{cases} .$$

Berechnen Sie in Störungsrechnung 1. Ordnung den Einfluss der endlichen Kernausdehnung auf die Grundzustandsenergie des H-Atoms.

Aufgabe 7: Störungstheorie für anharmonischen Oszillator [6 Punkte]

Berechnen Sie die Energieeigenwerte des eindimensionalen anharmonischen Oszillators

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{d^2}{d\,x^2} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 + \gamma\,x^4 \qquad \text{mit} \qquad \gamma > 0$$

in Störungsrechnung 1. Ordnung. Stellen Sie dabei x^4 durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^+$ und $\hat{a}$ dar und nutzen Sie deren Eigenschaften bei der Berechnung der Erwartungswerte aus. Überlegen Sie dabei, welche Anteile des Störoperators in „$\hat{a}$, $\hat{a}^+$-Darstellung“ überhaupt einen Beitrag zur Störungsrechnung 1. Ordnung liefern.

Aufgabe 8: Entartete Störungstheorie [7 Punkte]

Ein Teilchen mit der Masse m befinde sich in einem zweidimensionalen quadratischen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le x \le A \quad \text{und} \quad 0 \le y \le A \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zusätzlich wirke ein Potential $U(x, y) = \gamma\,x\,y$ auf das Teilchen. Die bekannten Eigenwerte und Eigenfunktionen des ungestörten Systems ($U = 0$) können verwendet werden. Berechnen Sie die Energiekorrekturen in 1. Ordnung Störungstheorie für den Grundzustand und den ersten angeregten Zustand, der entartet ist. Skizzieren Sie das resultierende Energieschema für diese Zustände.

Nützliche Integrale:

$$\int_0^A x \cdot \sin^2\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right) d\,x = \frac{A^2}{4}$$

$$\int_0^A x\,\sin\left(\frac{n\,\pi}{A}\,x\right)\sin\left(\frac{n'\,\pi}{A}\,x\right) d\,x = \frac{A^2}{2\,\pi^2}\left(\frac{1-\cos\left((n+n')\,\pi\right)}{(n+n')^2} - \frac{1-\cos\left((n-n')\,\pi\right)}{(n-n')^2}\right) \quad \text{für} \quad n \neq n'$$