4. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 29.10.2019, Abgabe: 05.11.2019

WWU

Aufgabe 9: Diamagnetische Verschiebung [8 Punkte]

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0,\, 0,\, B)$.

a) [2P] Geben Sie unter Vernachlässigung des Spins den Hamiltonoperator des Systems in Abhängigkeit von B an. Verwenden Sie dabei

$$\vec{A}\,(\vec{r}\,) = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\,\right) .$$

b) [2P] Wie lauten die Eigenenergien des Systems ohne Berücksichtigung des B^2-Terms im Hamiltonoperator?

c) [4P] Berechnen Sie den Einfluss des B^2-Terms auf die Energie der Zustände mit $n = 2$ im Rahmen der 1. Ordnung Störungstheorie. Ist es hier erforderlich, die entartete Störungstheorie zu verwenden?

Hinweis: Stellen Sie den Störoperator in Kugelkoordinaten dar. Außerdem können Sie folgende Integrale benutzen:

$$\langle\varphi_{200}|x^2+y^2|\varphi_{200}\rangle = 28\,a_B^2\,, \quad \langle\varphi_{210}|x^2+y^2|\varphi_{210}\rangle = 12\,a_B^2\,, \quad \langle\varphi_{21\pm1}|x^2+y^2|\varphi_{21\pm1}\rangle = 24\,a_B^2\,.$$

Aufgabe 10: Variationsrechnung [6 Punkte]

Der exakte Grundzustand des Wasserstoffatoms, beschrieben durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\,m} - \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}\,,$$

ist uns inzwischen wohlbekannt. Bestimmen Sie in dieser Aufgabe im Rahmen des Ritz'schen Variationsverfahrens eine obere Schranke für die Grundzustandsenergie. Berechnen Sie dazu

$$\tilde{E}\,(\lambda) = \frac{\langle\psi\,(\lambda)|\hat{H}|\psi\,(\lambda)\rangle}{\langle\psi\,(\lambda)|\psi\,(\lambda)\rangle}$$

und minimieren Sie diese Energie bezüglich λ. Verwenden Sie als Ansatz für $\psi\,(\lambda)$ eine Gauß-Funktion, d. h.

$$\psi\,(\vec{r};\,\lambda) = A\,e^{-\lambda\,\vec{r}^{\,2}}\,.$$

Aufgabe 11: Lineare Variation [6 Punkte]

Gegeben sei der Hamiltonoperator eines gestörten eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x^2 + \gamma\,x^3\,.$$

Berechnen Sie mit Hilfe linearer Variation mit dem Ansatz

$$\phi\,(x) = c_0\,\varphi_0\,(x) + c_1\,\varphi_1\,(x)$$

näherungsweise die niedrigsten Eigenwerte dieses Hamiltonoperators. Dabei sind

$$\varphi_0\,(x) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{(\alpha\,x)^2}{2}} \qquad \text{und} \qquad \varphi_1\,(x) = \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} 2\,\alpha\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha\,x)^2}{2}}$$

mit

$$\alpha = \left(\frac{m\,\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$

die exakten Eigenfunktionen zu den beiden niedrigsten Eigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators.