6. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 12.11.2019, Abgabe: 19.11.2019

WWU

Aufgabe 15: Rashba-Effekt [9 Punkte]

Ein Elektron bewege sich in der x-y-Ebene bei $z = 0$ unter dem Einfluss der Spin-Bahn-Wechselwirkung. In der z-Richtung wird die Bewegung durch ein Potential $V(z)$ stark eingeschränkt. Im Folgenden wird daher die kinetische Energie der Bewegung in der z-Richtung vernachlässigt. Der Hamiltonoperator hat dann die Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2\,m} + \frac{\hbar}{4\,m^2\,c^2}\left(\vec{\nabla} V \times \hat{\vec{p}}\right) \cdot \hat{\vec{\sigma}}$$

mit

$$\frac{\hbar}{4\,m^2\,c^2}\,\vec{\nabla} V = \left(0,\, 0,\, \frac{\hbar}{4\,m^2\,c^2}\,\frac{\partial V}{\partial z}\bigg|_{z=0}\right) := (0,\, 0,\, \gamma)\ .$$

a) [5P] Berechnen Sie die Eigenzustände von $\hat{H}$. Setzen Sie dazu die Wellenfunktion in der Form

$$\psi_{n,\vec{k}}(x,\, y, 0) = \begin{pmatrix} a_{n,\vec{k}} \\ b_{n,\vec{k}} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{i\,\vec{k}\,\vec{r}} \qquad \text{mit} \qquad \vec{k} = (k_x,\, k_y,\, 0) \qquad \text{und} \qquad n = 1,\, 2$$

an. Dieser Ansatz führt Sie auf ein 2×2-Gleichungssystem, aus dem Sie $E_{n,\vec{k}}$, $a_{n,\vec{k}}$ und $b_{n,\vec{k}}$ bestimmen können. Wählen Sie dabei $a_{1,\vec{k}} = a_{2,\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Skizzieren Sie $E_{n,\vec{k}}$ in Abhängigkeit von k_x für $k_y = 0$.

b) [4P] Berechnen Sie unter Verwendung von $a_{n,\vec{k}}$ und $b_{n,\vec{k}}$ die Spinerwartungswerte $\langle \hat{S}_x \rangle$, $\langle \hat{S}_y \rangle$ und $\langle \hat{S}_z \rangle$. In welche Richtung zeigt der Vektor $\langle \hat{\vec{S}} \rangle$ für $\vec{k} = (k_x,\, 0,\, 0)$? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k_x > 0$ und $k_x < 0$.

Aufgabe 16: Addition von Drehimpulsen [11 Punkte]

$\hat{\vec{L}}$ und $\hat{\vec{S}}$ seien zwei Drehimpulsoperatoren mit den Eigenzuständen $|l\,m_l\rangle$ und $|s\,m_s\rangle$. Stellen Sie die Eigenzustände $|l\,s\,j\,m_j\rangle$ des Gesamtdrehimpulsoperators $\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{L}} + \hat{\vec{S}}$ für $\boldsymbol{l} = \mathbf{1}$ und $\boldsymbol{s} = \mathbf{1}$ als Linearkombination der Zustände $|l\,m_l\rangle\,|s\,m_s\rangle = |l\,m_l;\, s\,m_s\rangle$ dar.

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) [5P] Betrachten Sie zunächst den Fall $j = 2$. Gehen Sie von $|11\,22\rangle = |11\rangle\,|11\rangle$ aus und gewinnen Sie die anderen Zustände durch Anwendung des Absteigeoperators $\hat{J}_- = \hat{L}_- + \hat{S}_-$.

b) [4P] Führen Sie Ihre Rechnungen für $j = 1$ durch. Starten Sie dazu beim Zustand $|11\,11\rangle$, den Sie aus der Orthogonalität dieses Zustandes zu $|11\,21\rangle$ unter Beachtung der Phasenkonvention $\langle ls\,jj|ll;\, s\,j - l\rangle = \langle ls\,jj|ll;\, s\,j - l\rangle^* \geq 0$ gewinnen können.

c) [2P] Betrachten Sie den Fall $j = 0$ und bestimmen Sie $|11\,00\rangle$ unter Verwendung der Orthogonalitätseigenschaften.

Hinweis: Da während der gesamten Rechnung $l = 1$ und $s = 1$ sind, bietet es sich an, die folgende Kurzschreibweise zu verwenden:

$$|j\,m_j\rangle := |ls\,j\,m_j\rangle \qquad \text{und} \qquad |m_l\rangle\,|m_s\rangle := |l\,m_l\rangle\,|s\,m_s\rangle\ .$$