7. Übung zur Quantentheorie [Krüger, WS 2019/20]
Ausgabe: 19.11.2019, Abgabe: 26.11.2019

Aufgabe 18: Spinzustand von zwei identischen Teilchen [7 Punkte]

Der Spinanteil des Zustandes zweier identischer Teilchen lässt sich in folgender Form darstellen:

i) $|\phi\rangle = \left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(2)}$

ii) $|\phi\rangle = \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(2)}$

iii) $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(2)} + \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(2)} \right)$

iv) $|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(2)} - \left|\frac{1}{2} \;\; -\frac{1}{2}\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; \frac{1}{2}\right\rangle^{(2)} \right)$,

wobei $|s\, m_s\rangle^{(k)}$ der Eigenzustand zu den Spinoperatoren $\hat{\vec{S}}_k^2$ und $\hat{S}_{k\,z}$ des k-ten Teilchens ist ($k = 1,\, 2$).

Zeigen Sie, dass die Zustände $|\phi\rangle$ Eigenzustände von $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$ sind, wobei $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$ die Summe der Spinoperatoren der beiden Teilchen ist. Berechnen Sie die Eigenwerte $\hbar^2\, s\,(s+1)$ und $\hbar\, m_s$ der Operatoren $\hat{\vec{S}}^2$ und $\hat{S}_z$.

Hinweise:

1. Zum Rechnen mit $\hat{\vec{S}}^2$ ist es hilfreich, diesen Operator in der Form
$$\hat{\vec{S}}^2 = \hat{\vec{S}}_1^2 + \hat{\vec{S}}_2^2 + \hat{S}_{1+}\,\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\,\hat{S}_{2+} + 2\, S_{1\,z}\, S_{2\,z}$$
zu verwenden. $\hat{S}_{k\,\pm}$ sind die Auf- und Absteigeoperatoren des k-ten Teilchens.
2. Verwenden Sie die Kurzschreibweise
$$|m_1\rangle\,|m_2\rangle := \left|\frac{1}{2} \;\; m_s\right\rangle^{(1)} \left|\frac{1}{2} \;\; m_s\right\rangle^{(2)} .$$

Aufgabe 19: Anomaler Zeeman-Effekt [9 Punkte]

Ein Elektron, das sich unter dem Einfluss des Coulombpotentials und einer vereinfachten Spin-Bahn-Wechselwirkung bewegt, wird einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0,\, 0,\, B)$ ausgesetzt. Der Hamiltonoperator dieses Systems habe die Form
$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \frac{e}{2\,m}\, B\, \left(\hat{L}_z + 2\,\hat{S}_z\right)$$
mit
$$\hat{H}^0 = \frac{\hat{p}_r^2}{2\,m} + \frac{\hat{\vec{L}}^2}{2\,m\,r^2} - \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r} + k\,\hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}} ,$$
wobei k eine Konstante ist.

Berechnen Sie den Erwartungswert von $\hat{H}$ in den Eigenzuständen $\chi_{n,\,l,\,s,\,j,\,m_j}\,(\vec{r},\, \vec{s})$ von $\hat{H}^0$ (vgl. Vorlesung):
$$\langle\hat{H}\rangle = \langle\chi_{n,\,l,\,s,\,j,\,m_j}|\hat{H}|\chi_{n,\,l,\,s,\,j,\,m_j}\rangle .$$

Skizzieren Sie $\langle\hat{H}\rangle$ im Falle eines verschwindenden und im Falle eines sehr kleinen Magnetfeldes für $n = 1,\, 2$ und alle möglichen Werte von l, j und m_j.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Erwartungswerte $\langle\hat{L}_z\rangle$ und $\langle\hat{S}_z\rangle$ für die Eigenzustände von $\hat{H}^0$.

Aufgabe 20: Nützliche Relationen für Erwartungswerte [4 Punkte]

Bei der Behandlung der Spin-Bahn-Kopplung für das Wasserstoffatom ist der Erwartungswert $\langle R_{nl}|r^{-3}|R_{nl}\rangle$ mit den radialen Wellenfunktionen $R_{nl}(r)$ zu bestimmen. Dieser Erwartungswert lässt sich durch Verwendung der unter a) und b) zu beweisenden Relationen einfach berechnen.

a) [1P] Zeigen Sie, dass für die Eigenzustände $\varphi_n(x)$ der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}\,\varphi_n(x) = E_n\,\varphi_n(x) \qquad \text{mit} \qquad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2}{\partial\,x^2} + V(x)$$

gilt:

$$\left\langle \varphi_n \middle| \frac{\partial\,V}{\partial\,x} \middle| \varphi_n \right\rangle = 0\ .$$

b) [1P] Betrachten Sie einen Hamiltonoperator $\hat{H}(\lambda)$, der ebenso wie seine Eigenwerte und Eigenfunktionen von einem Parameter λ abhängt

$$\hat{H}(\lambda)\,\chi_n(\lambda) = E_n(\lambda)\,\chi_n(\lambda)\ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\left\langle \chi_n(\lambda) \middle| \frac{\partial\,\hat{H}}{\partial\,\lambda} \middle| \chi_n(\lambda) \right\rangle = \frac{\partial\,E_n(\lambda)}{\partial\,\lambda}$$

gilt (Hellmann-Feynman-Theorem).

c) [2P] Der Hamiltonoperator in der radialen Schrödinger-Gleichung

$$\hat{H}\,R_{nl}(\vec{r}\,) = E_n\,R_{nl}(\vec{r}\,)$$

lautet:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{d^2}{d\,r^2} + \frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{l\,(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\frac{1}{r}\ .$$

Die Energien lassen sich in Abhängigkeit vom Parameter l in folgender Form schreiben:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\,E_{\text{Rydberg}} = -\frac{1}{(l+N)^2}\cdot\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{1}{a_B^2} \qquad \text{mit} \qquad N = n - l\ .$$

Verwenden Sie b), um den Erwartungswert $\langle R_{nl}|r^{-2}|R_{nl}\rangle$ zu bestimmen. Berechnen Sie damit

$$\langle R_{nl}|r^{-3}|R_{nl}\rangle \qquad \text{für} \qquad l \neq 0\ .$$