

Bitte melden Sie sich bis zum 17.12.2019 im QISPOS sowohl für die Übungen als auch für die Vorlesung/Klausur zur Quantentheorie an!

Aufgabe 20: Heliumatom

[13 Punkte]

Ein Heliumatom besteht aus einem Kern mit Ladung $+2e$ und zwei Elektronen. Der Kern werde als ruhend angenommen.

- a) [2P] Geben Sie den Hamiltonoperator \hat{H} des Systems an.

Betrachten Sie

$$\hat{H}^0 = \frac{\hat{p}_1^2}{2m} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m} - \frac{Z}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_1} - \frac{Z}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_2} \quad \text{mit} \quad Z = 2 - \frac{5}{16}$$

als ungestörten Hamiltonoperator. Wie lautet dann die Störung \hat{U} ?

- b) [3P] Geben Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen von \hat{H}^0 an.
c) [8P] Berechnen Sie den Energiebeitrag von U für den Grundzustand in der ersten Ordnung Störungstheorie.

Bei der Rechnung tritt unter anderem ein Integral der Form

$$I = \int \int \frac{e^{-\alpha(r_1+r_2)}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3 r_1 d^3 r_2$$

auf. Berechnen Sie dieses unter Verwendung der Fourierdarstellung des Coulombpotentials

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{d^3 k}{k^2} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Aufgabe 21: Identische Teilchen im Potentialtopf

[7 Punkte]

Drei identische Teilchen sollen sich wechselwirkungsfrei in einem eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bewegen:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}.$$

- a) [1P] Geben Sie als Wiederholung noch einmal die Eigenwerte E_n und die normierten Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ für ein Teilchen an.
b) [3P] Die drei Teilchen seien Bosonen mit Spin 0 und sollen sich in den Zuständen n_1, n_2 bzw. n_3 befinden. Wie lautet dann die Wellenfunktion $\psi(x_1 s_1, x_2 s_2, x_3 s_3) = \psi(1, 2, 3)$?
Geben Sie die Energie des Grundzustandes und die Grundzustandswellenfunktion an!
c) [3P] Die drei Teilchen seien jetzt Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$. Wie lautet jetzt die allgemeine Wellenfunktion $\psi(x_1 s_1, x_2 s_2, x_3 s_3)$?

Geben Sie wieder die Energie des Grundzustandes an! Wie viele mögliche Grundzustandskonfigurationen gibt es?

Geben Sie jeweils die zugehörige Grundzustandswellenfunktion an!