Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 10
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 17.12.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Das aktuelle Übungsblatt dient der Veranschaulichung der Multiple-Choice-Form, welche den Großteil der Klausur ausmachen wird. Bitte versehen Sie jede Ihrer Antworten mit einer ausführlichen schriftlichen Begründung. In der Klausur wird eine solche Begründung nicht von Ihnen verlangt werden. Bitte beachten Sie außerdem, dass die unten stehenden Aufgaben wie üblich korrigiert und nicht nach dem für die Klausur vorgesehenen Schema bewertet werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei K ein Körper. Betrachten Sie folgende Aussage: Ist V ein K-Vektorraum und ist $f : V \to V$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für $v, w \in V$ stets $f(v + w) = f(v) + f(w)$ gilt, so ist f eine K-lineare Abbildung. Entscheiden Sie:

(A) Die Aussage ist wahr für $K = \mathbb{Q}$.

(B) Die Aussage ist wahr für $K = \mathbb{F}_2$.

(C) Die Aussage ist wahr für $K = \mathbb{R}$.

(D) Die Aussage ist wahr für $K = \mathbb{C}$.

Hinweis: Die Aussage für $K = \mathbb{R}$ ist nicht ganz einfach. Sie dürfen benutzen: $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum und als solcher gleich der direkten Summe $\mathbb{Q} \oplus V$ von $\mathbb{Q}$-Untervektorräumen in $\mathbb{R}$. Wählen Sie jetzt einen $\mathbb{Q}$-Endomorphismus von $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \oplus V$, welcher auf $\mathbb{Q}$ gleich der Identität, aber auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ nicht die Identität ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und f und g zwei Endomorphismen von V. Welche der folgenden Aussagen sind stets richtig?

(A) Es gilt $\ker(g) \subseteq \ker(f \circ g)$.

(B) Gilt $\ker(g) = \ker(f \circ g)$, so ist f injektiv.

(C) Ist f injektiv, so gilt $\ker(g) = \ker(f \circ g)$.

(D) Ist $f \circ g$ ein Automorphismus von V, so sind f und g Automorphismen von V.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Gegeben wird im Folgenden eine Menge M und eine Relation $\sim$ auf M. In welchen Fällen ist die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation?

(A) $M = \mathbb{R}$; $a \sim b \Leftrightarrow a^2 = b^2$

(B) $M = \mathbb{R}$; $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{N}$

(C) $M = \mathbb{R}$; $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$

(D) $M = \mathbb{Z}$; $a \sim b \Leftrightarrow a$ teilt b (d.h. es gibt ein Element $c \in \mathbb{Z}$ mit $b = a \cdot c$)

Aufgabe 4 (4 Punkte): Die Rationalen Zahlen sind wie folgt definiert. Auf der Menge $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ist die Relation $\sim$, definiert durch $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = cb$. Machen Sie sich klar, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}))/\sim$. Welche der folgenden Abbildungen sind wohldefiniert?

(A) $p : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$,
$p([(a, b)], [(c, d)]) := [(ad + cb, bd)]$

(B) $m : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
$m([(a, b)], [(c, d)]) := [(ac, bd)]$

(C) $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad i([(a, b)]) := [(b, a)]$

(D) $n : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad n([(a, b)]) := [(-a, b)]$

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?