Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 11
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 07.01.2019, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\Big) := 2x_1 - x_2 + 3x_3.$$

Bestimmen Sie Elemente $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ mit $f^{-1}\big(\{1\}\big) = x + \big\langle\{y, z\}\big\rangle$. Geben Sie zusätzlich die Ebene $f^{-1}\big(\{1\}\big)$ in Koordinatenform an.

Aufgabe 2 (4 Punkte): (Zweiter Isomorphiesatz) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass für zwei Untervektorräume U und W von V die Abbildung

$$U/(U \cap W) \longrightarrow (U + W)/W\,, \quad u + (U \cap W) \longmapsto u + W$$

wohldefiniert und ein K-linearer Isomorphismus ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Betrachten Sie die Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{C}^3$ gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die zugehörige duale Basis von $\big(\mathbb{C}^3\big)^*$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ganzrational } \}$ der ganzrationalen Funktionen von Blatt 9, Aufgabe 2. Zeigen Sie:

1. Die Funktionen $p_i : x \mapsto x^i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ bilden eine Basis von V.
2. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\Phi_a : V \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(a)$ ein Element des Dualraums V^*.
3. Die Familie $(\Phi_a : a \in \mathbb{R})$ von Elementen $\Phi_a \in V^*$ ist linear unabhängig.

   Hinweis: Betrachten Sie zu vorgegebenen Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die ganzrationalen Funktionen $f_k(x) := \prod\limits_{i \neq k} (x - a_i)$.

Bemerkung: In diesem Beispiel ist $\dim_{\mathbb{R}} V$ *abzählbar unendlich*, während $\dim_{\mathbb{R}} V^*$ *überabzählbar unendlich* ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Hinweis: Die Vorlesung und die Übungen am Freitag, dem 21. Dezember, fallen aus. Besuchen Sie stattdessen eine Übung Ihrer Wahl am Mittwoch oder Donnerstag. Geben Sie Ihre Lösungen zu Blatt 10 wie gewohnt ab, die Korrekturen erhalten Sie nach den Ferien.