
Aufgabe 1 (4 Punkte): Die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 - ix_2 \\ x_2 + ix_3 \end{pmatrix}.$$

Die Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{C}^3$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2)$ von $\mathbb{C}^2$ seien gegeben durch

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ w_1 := \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } w_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ${}_{\mathcal{C}}[f]_{\mathcal{B}}$, ${}_{\mathcal{B}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ und ${}_{\mathcal{C}}\left[f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right]$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Berechnen Sie alle möglichen Produkte von zwei der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 18 & 3 & 12 \\ -14 & -3 & -9 \\ -22 & -3 & -15 \end{pmatrix} \text{ und } D := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Potenzen C^m von C für jede ganze Zahl $m \geq 1$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei K ein Körper und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ erfülle die Bedingung $A \cdot B = B \cdot A$ für alle Matrizen $B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass ein Element $\lambda \in K$ existiert mit $A = \lambda \cdot \mathrm{Id}_n$.

Hinweis: Betrachten Sie für $1 \leq i, j \leq n$ die Matrizen $B = E_{ij}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?