Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 4
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 05.11.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sind Y' und Y'' Teilmengen einer Menge Y, so definieren wir die Menge $Y' \smallsetminus Y''$ durch $Y' \smallsetminus Y'' := \{y \in Y' \mid y \notin Y''\}$ (in Worten: Y' *ohne* Y''). Es seien nun A, B und C Teilmengen einer Menge X. Zeigen Sie:

(i) Es gilt $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) Es gilt $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iii) Es gilt $A \smallsetminus (B \cup C) = (A \smallsetminus B) \cap (A \smallsetminus C)$.

(iv) Es gilt $A \smallsetminus (B \cap C) = (A \smallsetminus B) \cup (A \smallsetminus C)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Gegeben seien zwei Mengen A und B, sowie eine Abbildung $f : A \to B$. Zeigen Sie:

(i) Sind M und N zwei Teilmengen von A, so gilt $f(M \cup N) = f(M) \cup f(N)$, $f(M \cap N) \subseteq f(M) \cap f(N)$ und $M \subseteq f^{-1}(f(M))$. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass in den letzten beiden Fällen die Inklusionen echt sein können, aber nicht müssen.

(ii) Sind M und N zwei Teilmengen von B, so gilt stets $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$, $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$ und $f(f^{-1}(M)) \subseteq M$. Wann gilt im letzten Fall Gleichheit?

Aufgabe 3 (4 Punkte): Gegeben seien Mengen X, Y und Z, sowie zwei Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$. Zeigen Sie:

(i) Sind f und g injektiv (bzw. surjektiv), so ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv).

(ii) Ist $g \circ f$ injektiv (bzw. surjektiv), so ist f injektiv (bzw. g surjektiv).

(iii) Ist $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

Nehmen Sie $X = Z$ an und konstruieren Sie ein Beispiel, in dem $g \circ f$ bijektiv, f aber nicht surjektiv und g nicht injektiv ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte): (Universelle Eigenschaft des direkten Produkts) Es sei I eine Menge. Zu jedem Element $i \in I$ sei eine Menge X_i gegeben, und für $j \in I$ bezeichne $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ die durch $p_j((x_i)_{i \in I}) := x_j$ definierte j-te Projektionsabbildung. Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Abb}(X, Y) := \{\text{Abbildungen } f : X \to Y\}$ die Menge aller Abbildungen von der Menge X in die Menge Y. Zeigen Sie, dass für jede Menge X die durch $(f \mapsto (p_i \circ f)_{i \in I})$ definierte Abbildung

$$\mathrm{Abb}(X, \prod_{i \in I} X_i) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathrm{Abb}(X, X_i)$$

bijektiv ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Hinweis: Am Donnerstag, 1.11. und Freitag, 2.11. finden aufgrund von Allerheiligen und einer Bombenentschärfung in der Nähe des Instituts keine Übungen statt. Werfen sie Ihre Lösungen wie gewohnt in die passenden Briefkästen. Am Mittwoch, 31.10. wird von 14-16 Uhr im M2 eine Ersatzübung für alle Betroffenen angeboten.