Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 6
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 19.11.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei $V := \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die beiden Verknüpfungen $+ : V \times V \to V$ und $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_2 \\ a_2 + b_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ -\lambda \cdot b \end{pmatrix}.$$

Welche der Axiome (V1) – (V5) eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes werden von diesen Verknüpfungen erfüllt und welche verletzt?

Aufgabe 2 (4 Punkte): Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}^3$ sind Untervektorräume? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 2x_3 \right\}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} \nu + \mu \\ \lambda \\ 2\nu - 3\lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{Q} \right\}$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = 2 + x_3 \right\}$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \right\}$

Für die nächsten beiden Aufgaben sei I eine Menge, K ein Körper und für jedes Element $i \in I$ sei V_i ein K-Vektorraum.

Aufgabe 3 (3 Punkte): (Direktes Produkt) Zeigen Sie, dass das direkte Produkt $\prod_{i\in I} V_i$, vgl. Blatt 4 Aufgabe 4, durch die Verknüpfungen

$$(v_i)_{i\in I} + (w_i)_{i\in I} := (v_i + w_i)_{i\in I} \quad \text{und} \quad \lambda(v_i)_{i\in I} := (\lambda \cdot v_i)_{i\in I}$$

wieder zu einem K-Vektorraum wird.

Aufgabe 4 (5 Punkte): (Direkte Summe) Betrachten Sie die Teilmenge

$$\bigoplus_{i\in I} V_i := \left\{ (v_i)_{i\in I} \in \textstyle\prod_{i\in I} V_i \,\middle|\, \text{für fast alle}^* \; i \in I \text{ gilt } v_i = 0 \right\}$$

des direkten Produktes.

(i) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i\in I} V_i$ ein Untervektorraum von $\prod_{i\in I} V_i$ ist. Er heißt die *direkte Summe* der K-Vektorräume V_i, $i \in I$.

(ii) Fassen Sie K als K-Vektorraum auf und zeigen sie, dass $\bigoplus_{i\in I} K = \left\langle \{(\delta_{ij})_{j\in I} \mid i \in I\} \right\rangle$ als K-Untervektorräume von $\prod_{i\in I} K$.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

---

* d.h. für alle bis auf endlich viele Ausnahmen