Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 7
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 26.11.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Für $v \in V$ sei $v + U := \{v + u \mid u \in U\}$. Zeigen Sie:

(i) Sind $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 - v_2 \in U$, so gilt $v_1 + U = v_2 + U$.

(ii) Sind $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 - v_2 \notin U$, so gilt $(v_1 + U) \cap (v_2 + U) = \emptyset$.

(iii) Die Teilmenge $v + U$ von V ist genau dann ein Untervektorraum, wenn $v \in U$ gilt.

Bemerkung. Teilmengen der Form $v + U$ heißen *affine Unterräume* von V. Sie sind die Verallgemeinerung von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$, bei welchen U von einem, bzw. von zwei linear unabhängigen Vektoren erzeugt ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und I eine Menge. Für jedes Element $i \in I$ sei A_i eine Teilmenge von V. Die Familie $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von V genüge der folgenden Bedingung: Zu je zwei Elementen $i, j \in I$ existiere ein Element $k \in I$ mit $A_i \cup A_j \subseteq A_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$\Big\langle \bigcup_{i \in I} A_i \Big\rangle = \bigcup_{i \in I} \langle A_i \rangle$$

gilt, dass diese Aussage aber ohne die obige Voraussetzung an die Familie $(A_i)_{i \in I}$ im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Für welche Elemente $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 11 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig? Stellen Sie im Fall $t = 0$ den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 19 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der obigen drei Vektoren dar.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{Q}^n$ die Teilmenge aller Vektoren mit ganzzahligen Einträgen.

(i) Es sei $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ eine Teilmenge mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element von $\mathbb{Z}^n$ als *ganzzahlige* Linearkombination der Elemente von A, d.h. als $\sum_i \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{Z}, v_i \in A$ darstellen lässt. Zeigen Sie, dass A ein Erzeugendensystem des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}^n$ ist.

(ii) Betrachten Sie im Fall $n = 2$ die Teilmenge $A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{Z}^2$. Zeigen Sie, dass A ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^2$ ist. Lässt sich jedes Element von $\mathbb{Z}^2$ als *ganzzahlige* Linearkombination der Elemente von A darstellen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?