**Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I** WS 2018/19
**Prof. Dr. Urs Hartl** Blatt 8
**Markus Schmetkamp**
Abgabetermin: Montag, den 03.12.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

---

**Aufgabe 1 (4 Punkte):** Betrachten Sie die folgenden Vektoren in $\mathbb{Q}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $E := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(ii) Sei $n$ die Briefkastennummer Ihres Tutors. Bestimmen Sie $k := (n \mod 3) + 1^*$. Stellen Sie $v_k$ als Linearkombination der Elemente von $E \setminus \{v_k, v_4\}$ dar.

(iii) Bestimmen Sie alle maximalen linear unabhängigen Teilmengen von $E$; nach (i) sind das alle Basen von $\mathbb{Q}^3$, die in $E$ enthalten sind.

**Hinweis:** Nach (ii) ist $E \setminus \{v_4\}$ linear abhängig. Wenn Sie geschickt argumentieren, können Sie (iii) bearbeiten ohne für jede Menge lineare Unabhängigkeit prüfen zu müssen.

**Aufgabe 2 (4 Punkte):** Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die Untervektorräume $U$ und $V$ gegeben durch

$$U := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \quad \text{und} \quad V := \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Bestimmen Sie eine Basis von $U \cap V$ und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $U + V$.

**Aufgabe 3 (3 Punkte):** Es seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei 2-dimensionale $\mathbb{R}$-Untervektorräume (Ebenen). Begründen Sie mithilfe der Dimensionsformel, dass sich $V$ und $W$ nicht trivial schneiden, d.h. $V \cap W \neq \{0\}$. Erklären Sie außerdem, wieso hier die beiden Ebenen $V$ und $W$ nicht parallel sein können.

**Aufgabe 4 (5 Punkte):** Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein endlich erzeugter $K$-Vektorraum und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Betrachten Sie folgende Aussage:
Für jede Familie von Untervektorräumen $U_1, \dots, U_n$ von $V$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) = \dim\left( \sum_{i=1}^{n} U_i \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \dim\left( \left( \sum_{j=1}^{i} U_j \right) \cap U_{i+1} \right).$$

(i) Beweisen Sie die Aussage für $n = 1$ und $n = 2$. *(1 Punkt)*

(ii) Beweisen Sie die Aussage mit Induktion nach $n$ für alle $n \geq 1$. *(3 Punkte)*

(iii) Folgern Sie, dass $V$ genau dann die direkte Summe der Unterräume $U_1, \dots, U_n$ ist, wenn $V = U_1 + \ldots + U_n$ gilt und $(U_1 + \ldots + U_i) \cap U_{i+1} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$. *(1 Punkt)*

**Aufgabe 5 (2 Punkte):** Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

---

$^*(n \mod 3)$ ist der Rest der Division $n$ geteilt durch 3, also eine Zahl zwischen 0 und 2.