Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 9
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 10.12.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte): Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2z \\ x \end{pmatrix}$.

(ii) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2+y \\ y \end{pmatrix}$.

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = mx + b$ für zwei reelle Zahlen m und b.

(iv) $\mathrm{ev}_\alpha : \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{ev}_\alpha(g) = g(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. diese Abbildung wertet eine Abbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle α aus. (ev steht für „Evaluation", d.h. Auswertung.)

Aufgabe 2 (4 Punkte): Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *ganzrational*, falls es Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(i) $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist ganzrational } \}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildungen } \}$.

(ii) Die Differenziation $\frac{d}{dx} : V \to V,\ f \mapsto \frac{df}{dx} = f'$ ist ein $\mathbb{R}$-Endomorphismus von V. Prüfen Sie, ob $\frac{d}{dx}$ surjektiv oder injektiv ist.

(iii) Es gibt einen Endomorphismus $I : V \to V$, genannt *Integration*, mit $\frac{d}{dx} \circ I = \mathrm{id}_V$, aber $I \circ \frac{d}{dx} \neq \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei K ein Körper. Für beliebiges $a = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ sei $f_a : K^n \to K$ die Abbildung

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Zeigen Sie, dass f_a K-linear ist und dass $H_a := \{x \in K^n \mid f_a(x) = 0\}$ ein K-Untervektorraum von K^n ist. Welche Dimension hat H_a?

Aufgabe 4 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?

Auf der Rückseite befindet sich eine Nikolausaufgabe.

Nikolausaufgabe (4 Bonuspunkte): Der Nikolaus plant das diesjährige Geschenkeverteilen. Brave Kinder bekommen tendenziell mehr Geschenke als unartige, am Ende wird aber kein Kind leer ausgehen. Da es mehr Kinder als Arten an Spielzeug gibt, versucht der Nikolaus für jedes Kind ein individuelles Paket aus mehreren Spielzeugarten zusammenzustellen. Er hofft so auf mehr Vielfalt.
Dennoch, egal wie lange der Nikolaus überlegt er schafft er es nie die ultimative Vielfalt zu erreichen: Nachdem alle Kinder beschenkt wurden, finden sich immer zwei Gruppen an Kindern welche jeweils die gleichen Spielzeuge erhalten haben.

Ein kleines Beispiel:

Kinder = {Descartes, Cantor, Abel, Grassmann, Kronecker, Gauß}
Spielzeuge = {Buch, Ball, Trommel, Teddy}

Kind	Geschenke
Descartes:	Buch, Trommel
Cantor:	Buch, Ball
Abel:	Ball, Teddy
Grassmann:	Trommel
Kronecker:	Ball
Gauß:	Buch, Teddy

Jedoch haben Cantor und Abel zusammen die Geschenke {Buch, Ball, Teddy} genauso wie Kronecker und Gauß. Wieso kommt der Nikolaus um dieses Problem nicht herum?

Hinweis: Diese Aufgabe ist zum Knobeln gedacht und kann tatsächlich mithilfe der Vorlesung gelöst werden. Überlegen Sie sich wie Sie den Sachverhalt mathematisch modellieren können.
Alternativ können Sie diese Aufgabe sinnvoll bearbeiten, indem Sie dem Nikolaus ein weihnachtliches Gedicht über Ihren Lieblingsvektorraum schreiben.