Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I WS 2018/19
Prof. Dr. Urs Hartl Blatt 2
Markus Schmetkamp
Abgabetermin: Montag, den 22.10.2018, 08:15 Uhr, Briefkästen

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(i) Finden Sie für die durch $E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 4\}$ definierte Ebene E im $\mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung.

(ii) Betrachten Sie die in der Parameterdarstellung

$$L := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gegebene Gerade L im $\mathbb{R}^3$. Finden Sie Elemente $a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3', b, b' \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \text{ und } a_1'x_1 + a_2'x_2 + a_3'x_3 = b'\}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Die Gerade G im $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad x_1 - x_2 = 0.$$

Für eine fest gewählte reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ sei die Gerade H_a im $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Gleichungen

$$x_1 + x_3 = 2 \qquad \text{und} \qquad ax_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von a sich die Geraden G und H_a schneiden bzw. für welche Werte sie gleich, parallel oder windschief sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene oder eine Gerade. Zeigen Sie: Sind $P, Q \in M$, so gilt auch $P + \mu(Q - P) \in M$ für jedes Element $\mu \in \mathbb{R}$. Folgern Sie:

(i) Ist M eine Gerade, sind $P, Q \in M$ mit $P \neq Q$, und ist M' die Gerade

$$M' := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{Es gibt } \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } x = P + \lambda(Q - P)\},$$

so gilt $M = M'$.

Hinweis: Nach dem oben Gezeigten gilt $M' \subseteq M$, sodass Sie $M \subseteq M'$ beweisen müssen. Machen Sie sich zunächst klar, dass es hier tatsächlich etwas zu zeigen gibt!

(ii) Ist M eine Ebene, und ist $G \subset \mathbb{R}^3$ eine Gerade, die M in mindestens zwei Punkten schneidet, so gilt $G \subset M$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ die durch

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definierte Abbildung. Zeigen Sie:

(i) Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt $\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y)$.

(ii) Ist $E \subset \mathbb{R}^3$ eine Ebene, die durch eine Gleichung der Form $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit $a_3 \neq 0$ gegeben ist, so existiert zu jedem Element $z \in \mathbb{R}^2$ genau ein Element $x \in E$ mit $\Phi(x) = z$. Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung Φ? Welche geometrische Struktur besitzt die Menge $\Phi(E) := \{\Phi(x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E\}$ im Falle $a_3 = 0$?

Aufgabe 5 (2 Punkte): Welche Zusammenhänge, Details, Inhalte oder Fragen sollen in der nächsten Übung besprochen werden?