Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 1
Abgabe 2.5.2017

Aufgabe 1:

Begründen Sie, dass die folgende Menge mit der dazugehörigen Multiplikation eine Halbgruppe bildet. Entscheiden Sie, welche der Halbgruppen eine Gruppe ist.

(i) $G = \mathbb{Z}_{\geq 1}$ versehen mit der gewöhnlichen Multiplikation.

(ii) $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Menge der $\mathbb{R}$-wertigen 2×2-Matrizen mit Determinante ungleich 0, versehen mit der gewöhnlichen Multiplikation.

(iii) Sei G eine beliebige Menge versehen mit der Multiplikation $xy = y$ für alle $x, y \in G$.

(iv) Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis (v_1, v_2). Sei G die Menge der $\mathbb{R}$-Automorphismen, die jedes Element der Basis (v_1, v_2) in ein skalares vielfaches überführen. Die Multiplikation ist die kanonische Verknüpfung von Automorphismen. Beschreiben Sie G in Termen von Matrizen.

Aufgabe 2:

(i) Sei G eine Gruppe für die gilt: $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(ii) Sei G eine Gruppe für die gilt: $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

(iii) Sei G eine endliche abelsche Gruppe mit ungerader Ordnung. Zeigen Sie $\prod_{g \in G} g = e$.

Aufgabe 3:

Sei G eine Gruppe mit $|G| \leq 5$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist. Finden Sie ein Beispiel für eine Gruppe mit 6 Elementen, die nicht abelsch ist.

Aufgabe 4:

Sei B (bzw. U) die folgende Teilmenge von $G \coloneqq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$

$$B = \{(a_{ij}) \in G \,|\, a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$$
$$(\text{bzw. } U = \{(a_{ij}) \in B \,|\, a_{ii} = 1,\, 1 \leq i \leq n\}\,)$$

(i) Zeigen Sie, dass B (bzw. U) zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Untergruppe von G ist. Zeigen Sie ferner, dass U ein Normalteiler in B ist.

(ii) Beweisen Sie, dass $B/U \cong (\mathbb{R}^\times)^n$.

(iii) Entscheiden Sie, ob B (bzw. U) ein Normalteiler in G ist.

(iv) Entscheiden Sie, ob G ein Normalteiler in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist.

Informationen:

- Für jede Aufgabe gibt es 5 Punkte.
- Abgabe bei den Postfächern bis 14 Uhr.
- Homepage: www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungSS17/index.html

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 2
Abgabe: 8.5.2017

Aufgabe 1:

Sei G eine Gruppe der Ordnung $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n ist.

Aufgabe 2:

Sei $G' \subseteq G$ die von $U = \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$ erzeugte Untergruppe. Beweisen Sie folgende Aussagen über G'.

(i) Die Untergruppe G' ist ein Normalteiler in G.
(ii) Die Faktorgruppe G/G' ist abelsch.
(iii) Sei N ein Normalteiler in G. Dann ist G/N abelsch, genau dann wenn $G' \subseteq N$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie in den folgenden Gruppen alle Normalteiler und deren Quotienten.

(i) Sei $D_8 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ die Untergruppe, welche erzeugt wird durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Die Gruppe D_8 ist die Symmetriegruppe eines Quadrats und wird *Diedergruppe der Ordnung 8* genannt.)

(ii) Sei $Q_8 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Untergruppe, welche erzeugt wird durch

$$\mathrm{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(Die Gruppe Q_8 wird auch *Quaternionengruppe* genannt.)

Aufgabe 4:

Sei G eine Gruppe.

(i) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe vom Index 2 ein Normalteiler in G ist.
(ii) Geben Sie ein Beispiel für eine Untergruppe vom Index 3, die kein Normalteiler ist.
(iii) Seien M, N Normalteiler in G mit $M \cap N = \{e\}$. Zeigen Sie, dass für alle $m \in M, n \in N$ die Gleichung $mn = nm$ gilt.
(iv) Sei H eine Untergruppe von G, die für alle $a, b \in G$ die Implikation

$$aH = bH \Rightarrow Ha = Hb$$

erfüllt. Ist H ein Normalteiler in G?

Homepage: www.wwu.de/IVV5WS/WebHop/user/hellmane/VorlesungSS17/index.html

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 3
Abgabe: 15.5.2017

Aufgabe 1:

(i) Beweisen Sie, dass die Produktgruppe $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann zyklisch ist, wenn m und n teilerfremd sind.

(ii) Sei G eine Gruppe und $N_1, \dots, N_k$ Normalteiler in G mit

$$N_1 \cap \ldots \cap N_k = \{e\}.$$

Setze $H_i := G/N_i$. Zeigen Sie, dass G zu einer Untergruppe von $H_1 \times \ldots \times H_k$ isomorph ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und sei $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ eine Partition von n, d.h. $n_i \in \mathbb{N}$ und $n_1 + \ldots + n_r = n$. Dann operiert $\mathrm{GL}_n := \mathrm{GL}_n(K)$ in natürliche Weise auf der Menge der Flaggen

$$\mathrm{Flag}_{\underline{n}} = \{0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_r = K^n \mid \dim_K V_i = n_1 + \ldots + n_i\}.$$

(i) Zeigen Sie, dass die parabolische Untergruppe

$$P_{\underline{n}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1\,r} \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} A_i \in \mathrm{GL}_{n_i}, & 1 \le i \le r \\ B_{ij} \in \mathrm{Mat}(n_i \times n_j, K), & 1 \le i < j \le r \end{array} \right\}$$

eine Untergruppe von GL_n ist. Benutzen Sie dafür die Operation von GL_n auf der Menge $\mathrm{Flag}_{\underline{n}}$.

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (i), dass die dazugehörige Levi Untergruppe

$$M_{\underline{n}} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix} \middle| A_i \in \mathrm{GL}_{n_i},\ 1 \le i \le r \right\}$$

eine Untergruppe von $P_{\underline{n}}$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass das unipotente Radikal

$$U_{\underline{n}} = \left\{ \begin{pmatrix} I_1 & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{r-1\,r} \\ 0 & \cdots & 0 & I_r \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{ll} I_i = \mathrm{Id}_{\mathrm{GL}_{n_i}}, & 1 \le i \le r \\ B_{ij} \in \mathrm{Mat}(n_i \times n_j, K), & 1 \le i < j \le r \end{array} \right\}$$

ein Normalteiler in $P_{\underline{n}}$ ist. Beweisen Sie den Isomorphismus $P_{\underline{n}}/U_{\underline{n}} \cong M_{\underline{n}}$.

Aufgabe 3:

Geben Sie zwei Beweise für den Satz, dass die symmetrische Gruppe S_4 auflösbar ist.

(i) Geben Sie eine Subnormalreihe mit abelschen Quotienten für S_4 an.

(ii) Zeigen Sie erst, dass die Gruppe S_3 auflösbar ist. Beweisen Sie dann, dass S_3 auflösbar ist, genau dann wenn S_4 auflösbar ist.
Hinweis: Finden Sie einen geeigneten surjektiven Homomorphismus $S_4 \to S_3$.

Aufgabe 4:

Sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n. Sei p eine Primzahl mit $p|n$. Zeigen Sie, dass G ein Element der Ordnung p enthält.

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 4
Abgabe: 22.5.2017

Aufgabe 1:

Beweisen Sie, dass jede endliche auflösbare Gruppe G eine Normalreihe

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$$

besitzt, so dass die Subquotienten G_i/G_{i-1} Primzahlordnung haben.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie, dass eine Gruppe G der Ordnung 15 zyklisch ist.
Hinweis: Benutzen Sie die Sylowschen Sätze um zu zeigen, dass G nur eine 3-Sylow- bzw. nur eine 5-Sylowgruppe hat. Zeigen Sie dann, dass diese zwei Sylowgruppen normal sind.

Aufgabe 3:

Sei R ein kommutativer Ring und I, J Ideale in R. Definiere die Teilmengen IJ und $I + J$ von R wie folgt:

- $IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, b_i \in J \right\}$
- $I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Mengen IJ und $I + J$ sind Ideale in R.
(ii) Es gilt die Inklusion $IJ \subseteq I \cap J$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem die Inklusion strikt ist.
(iii) Es gilt, dass $IJ = I \cap J$ falls $I + J = R$.

Aufgabe 4:

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen mit der natürlichen Addition und Multiplikation Ringe sind. Welche der Ringe sind nullteilerfrei? Bei welchen Ringen handelt es sich um Körper?

(i) $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$
(ii) $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_{>0}, p \nmid b \right\}$, wobei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl ist.
(iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right) = \left\{ x + y\sqrt{5} \mid x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}$
(iv) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
(v) $\mathbb{Q}[\epsilon] := \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$, wobei $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_1 b_2 + a_2 b_1)$, für alle $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Die Addition wird komponentenweise definiert.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 5
Abgabe: 29.5.2017

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper. Geben Sie zwei Beweise für die Aussage, dass die Ringe $K[X,Y]$ und $\mathbb{Z}[X]$ keine Hauptidealringe sind.

(i) Geben Sie jeweils ein Ideal an, welches kein Hauptideal ist.
(ii) Geben Sie jeweils ein nicht-triviales Primideal an, das nicht maximal ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und $K[\![X]\!]$ der Potenzreihenring mit Koeffizienten in K.

(i) Sei $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in K[\![X]\!]$. Zeigen Sie, dass $f \in K[\![X]\!]^{\times}$, genau dann wenn $a_0 \neq 0$.
(ii) Bestimmen Sie alle Ideale von $K[\![X]\!]$.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und sei $\varphi\colon K[X_1,\ldots,X_m] \longrightarrow K[X_1,\ldots,X_n]$ ein Ringisomorphismus mit der Eigenschaft $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$. Zeigen Sie, dass gilt $m = n$.
Hinweis: Betrachte die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{Hom}\,(K[X_1,\ldots,X_n],K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(K[K_1,\ldots,K_m],K) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

wobei

$\mathrm{Hom}\,(K[X_1,\ldots,X_r],K) = \{f\colon K[X_1,\ldots,X_r] \to K \mid f \text{ Ringhomomorphismus mit } f|_K = \mathrm{id}_K\}$.

Aufgabe 4:

(i) Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathbb{Z}[X]/\,(X-8, 2X-6)$ und $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ isomorph sind. Konstruieren Sie dafür mit Hilfe des Homomorphiesatzes Abbildungen

$$\mathbb{Z}[X]/\,(X-8,2X-6) \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[X]/\,(X-8,2X-6)\,,$$

welche zueinander invers sind.
(ii) Sei $R = \mathbb{Z}[X]/\,\big(2, X^2+X+1\big)$. Zeigen Sie, dass R ein Körper mit 4 Elementen ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 5
Abgabe: 29.5.2017

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper. Geben Sie zwei Beweise für die Aussage, dass die Ringe $K[X, Y]$ und $\mathbb{Z}[X]$ keine Hauptidealringe sind.

(i) Geben Sie jeweils ein Ideal an, welches kein Hauptideal ist.
(ii) Geben Sie jeweils ein nicht-triviales Primideal an, das nicht maximal ist.

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper und $K[\![X]\!]$ der Potenzreihenring mit Koeffizienten in K.

(i) Sei $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i X^i \in K[\![X]\!]$. Zeigen Sie, dass $f \in K[\![X]\!]^\times$, genau dann wenn $a_0 \neq 0$.
(ii) Bestimmen Sie alle Ideale von $K[\![X]\!]$.

Aufgabe 3:

Sei K ein Körper und sei $\varphi\colon K[X_1, \ldots, X_m] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ringisomorphismus mit der Eigenschaft $\varphi|_K = \mathrm{id}_K$. Zeigen Sie, dass gilt $m = n$.
Hinweis: Betrachte die induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \psi\colon \mathrm{Hom}\,(K[X_1, \ldots, X_n], K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\,(K[K_1, \ldots, K_m], K) \\ f &\longmapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

wobei

$\mathrm{Hom}\,(K[X_1, \ldots, X_r], K) = \{f\colon K[X_1, \ldots, X_r] \to K \mid f \text{ Ringhomomorphismus mit } f|_K = \mathrm{id}_K\}$.

Aufgabe 4:

(i) Zeigen Sie, dass die Ringe $\mathbb{Z}[X]/\,(X-8, 2X-6)$ und $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ isomorph sind. Konstruieren Sie dafür mit Hilfe des Homomorphiesatzes Abbildungen

$$\mathbb{Z}[X]/\,(X-8, 2X-6) \longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \quad \text{sowie} \quad \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[X]/\,(X-8, 2X-6)\,,$$

welche zueinander invers sind.
(ii) Sei $R = \mathbb{Z}[X]/\left(2, X^2 + X + 1\right)$. Zeigen Sie, dass R ein Körper mit 4 Elementen ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 6
Abgabe: 12.6.2017

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie für den Ring $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$ die Anzahl seiner

(i) Nullteiler,
(ii) Einheiten,
(iii) Ideale,
(iv) Primideale,
(v) maximalen Ideale.

Aufgabe 2:

(i) Sei R ein Hauptidealring und seien $a, b, r \in R \backslash \{0\}$. Zeigen Sie

$$r \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = \mathrm{ggT}(r \cdot a, r \cdot b).$$

(ii) Seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$. Beweisen Sie, dass der ggT von f und g in $\mathbb{Q}[X]$ derselbe ist, wie der ggT von f und g in $\mathbb{C}[X]$.

Aufgabe 3:

Seien $f = 2X^3 + 9X^2 + 10X + 3$ und $g = X^2 - X - 2$ Elemente in $\mathbb{Z}[X]$.

(i) Bestimmen Sie eine Zerlegung von f bzw. g in ein Produkt irreduzibler Polynome in $\mathbb{Q}[X]$ und in $\mathbb{F}_5[X]$.
(ii) Berechnen Sie den ggT der Polynome f und g in $\mathbb{Q}[X]$ sowie in $\mathbb{F}_5[X]$.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $\mathfrak{p}R[X] = \{\sum_{i=1}^{n} a_i X^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathfrak{p}\}$ das von $\mathfrak{p}$ erzeugte Ideal von $R[X]$. Beweisen Sie, dass $\mathfrak{p}R[X]$ ein Primideal in $R[X]$ ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 7
Abgabe: 19.6.2017

Aufgabe 1:

(i) Sei R ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper Q. Sei $f \in R[X]$ ein normiertes Polynom, und $r \in Q$ eine Nullstelle von f. Zeigen Sie, dass $r \in R$.

(ii) Sei K ein Körper, der unendlich viele Elemente besitzt. Sei $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom mit $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ für alle $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Beweisen Sie, dass $f = 0$. Geben Sie im Fall, dass K ein endlicher Körper ist, ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie, dass folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind. Welche davon sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$?

(i) $4X^3 + 18X^2 - 12X + 6$,

(ii) $5X^2 - 11X + 3$,

(iii) $X^4 + a^2$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ eine ungerade Zahl ist.

Aufgabe 3:

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f = X^p - X - 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.

Hinweis: Der Isomorphismus $\varphi\colon \mathbb{F}_p[X] \to \mathbb{F}_p[X], X \mapsto X + 1$ fixiert das Polynom f.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und $R = K[X,Y]/\left(X^2 - Y^3\right)$.

(i) Zeigen Sie, dass R ein Integritätsbereich ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der Quotientenkörper $Q(R)$ von R isomorph zu $K(T)$ ist, wobei $T = \frac{X}{Y}$.

(iii) Beweisen Sie, dass R nicht faktoriell ist. Nutzen Sie dafür Augabe 1(i).

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 8
Abgabe: 26.6.2017

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper und

$$K[X, X^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-n}^{m} c_i X^i \mid n, m \in \mathbb{N}, c_i \in K \right\} \subset K(X).$$

Konstruieren Sie einen Ringisomorphismus $K[X,Y]/\,(XY-1) \longrightarrow K[X, X^{-1}]$.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie folgende Aussagen:

(i) Für jede Primzahl p ist das Polynom $X^p + p - 1$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.
Hinweis: Betrachte den Ringisomorphismus $X \mapsto X + 1$.

(ii) Für einen beliebigen Körper K ist das Polynom $X_1^5 + X_1^2 X_2 + X_1 X_2 + X_2$ irreduzibel in $K[X_1, X_2]$.

Aufgabe 3:

Zerlegen Sie folgende Polynome in irreduzible Faktoren:

(i) $X^3 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$, $p = 2, 3, 5$,

(ii) $X^5 + 5X + 5 \in \mathbb{F}_2[X]$.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper.

(i) Sei $R = K[X,Y]$. Betrachten Sie die Ideale $(X), (Y), (X,Y)$ als R-Moduln. Welche davon sind zueinander isomorph, welche nicht?

(ii) Sei $R = K[X,Y]/(XY)$. Zeigen Sie, dass das Ideal (X) und der Quotient $R/(Y)$ als R-Moduln isomorph sind.

(iii) Zeigen Sie, dass jeder $\mathbb{Z}$-Modulhomomorphismus $\mathbb{Z}/(n) \longrightarrow \mathbb{Z}$ trivial (also identisch 0) ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 9
Abgabe: 3.7.2017

Aufgabe 1:

(i) Sei R ein Integritätsbereich und sei $I \subset R$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass I als R-Modul frei ist, genau dann wenn I ein Hauptideal ist.

(ii) Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein nicht-triviales Ideal von R. Zeigen Sie, dass der Quotient R/I nicht frei ist als R-Modul.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}$ kein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist.

Aufgabe 3:

Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass der R-Modul $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ frei von endlichem Rang ist.

Aufgabe 4:

(i) Sei R ein Ring und

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow f & & \big\downarrow g & & \big\downarrow h & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & N & \longrightarrow & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von R-Moduln. Dann ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \ker g \longrightarrow \ker h \longrightarrow 0$$

exakt, falls f surjektiv ist.

(ii) Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Beweisen Sie, dass M endlich präsentierbar ist, falls M' und M'' endlich präsentierbar sind.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 10
Abgabe: 10.7.2017

Aufgabe 1:

Seien M, N und P endlich erzeugte Moduln über einem Hauptidealring mit $M \oplus P \cong N \oplus P$. Zeigen Sie, dass $M \cong N$.

Aufgabe 2:

Entscheiden Sie, welche der folgenden $\mathbb{Z}$-Moduln endlich erzeugt, welche torsionsfrei und welche frei sind.

(i) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,
(ii) $\mathbb{Z}[X]$,
(iii) $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$,
(iv) A, wobei A eine beliebige endliche abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 3:

Sei R ein Hauptidealring mit Quotientenkörper K.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ und M ein endlich erzeugter R-Untermodul von K^n, sodass K^n als K-Vektorraum vom M erzeugt wird. Zeigen Sie, dass M ein freier R-Modul von Rang n ist und dass jede Basis von M als R-Modul auch eine Basis von K^n als K-Vektorraum ist. (Solche Moduln nennt man auch *Gitter von* K^n).

(ii) Sei Λ die Menge der Gitter von K^n. Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ operiert transitiv auf der Menge der Basen von K^n, also operiert $\mathrm{GL}_n(K)$ auch transitiv auf Λ. Zeigen Sie die Bijektion

$$\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(R) \xleftrightarrow{\sim} \Lambda$$

Aufgabe 4:

Sei nun R ein *lokaler* Hauptidealring mit Quotientenkörper K, d.h. es existiert nur ein nicht-triviales Primideal $(t) \subset R$.

(i) Sei $0 \neq x \in K$. Zeigen Sie, dass man x schreiben kann als $x = rt^k$, für ein $r \in R^\times, k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie weiter, dass $x \in R$, genau dann wenn $k \geq 0$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und Λ die Menge der Gitter von K^n, wie in Aufgabe 3. Beweisen Sie, dass die $\mathrm{GL}_n(R)$-Orbiten von Λ in Bijektion stehen zu

$$\mathbb{Z}^n_{\leq} = \{(k_1, \dots, k_n) \mid k_1 \leq \dots \leq k_n\}$$

Mit anderen Worten: Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n_{\leq} &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(R)\backslash\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(R) \\ (k_1, \dots, k_n) &\longmapsto \mathrm{diag}(t^{k_1}, \dots, t^{k_n}) \end{aligned}$$

eine Bijektion ist.
Hierbei wird mit $\mathrm{diag}(t^{k_1}, \dots, t^{k_n})$ die Restklasse der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} t^{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & t^{k_n} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(K)$$

in $\mathrm{GL}_n(R)\backslash\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{GL}_n(R)$ bezeichnet.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 11
Abgabe: 17.7.2017

Aufgabe 1:

Sei K/k eine Körpererweiterung und $a_1, \dots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass $k(a_1, \dots, a_n)$ algebraisch über k ist, genau dann wenn die Elemente $a_1, \dots, a_n$ algebraisch über k sind.

Aufgabe 2:

Sei K/k eine endliche Körpererweiterung mit Zwischenkörpern E und F. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $[EF\colon F] \leq [E\colon E \cap F]$.
(ii) $[EF\colon k] \leq [E\colon k][F\colon k]$.
(iii) $[EF\colon k] = [E\colon k][F\colon k]$, falls $[E\colon k]$ und $[F\colon k]$ teilerfremd sind.

Aufgabe 3:

(i) Sei K/k eine endliche Körpererweiterung mit der Eigenschaft, dass $[K\colon k]$ eine Primzahl ist. Zeigen Sie, dass ein $a \in K$ existiert, so dass $K = k(a)$.
(ii) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a^3 + 2a - 1 = 0$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbb{Q}$ und den Grad des Minimalpolynoms von $a^2 + a$ über $\mathbb{Q}$.
(iii) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\sqrt[n]{p}$ über $\mathbb{Q}$ und den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{p})/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4:

(i) Zeigen Sie, dass jede Erweiterung vom Grad 2 normal ist.
(ii) Finden Sie ein Beispiel einer Erweiterung von Grad 3, welche nicht normal ist.
(iii) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$. Zeigen Sie, dass K nicht normal über $\mathbb{Q}$ ist, es aber einen Zwischenkörper E von $K/\mathbb{Q}$ mit $[K\colon E] = [E\colon \mathbb{Q}] = 2$ gibt.
Insbesondere ist die Eigenschaft *normal* nicht transitiv.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen

Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

SS 2017

Einführung in die Algebra
Blatt 12
Wiederholung

Dies ist keine Probeklausur. Die folgende Fragen dienen lediglich als Reflextest. Sie sollten sämtliche Fragen aus dem Stegreif beantworten können.

Gruppentheorie:

(1) Wie lauten die Gruppen der Ordnung 4? Sind diese abelsch?
(2) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die symmetrische Gruppe S_n auflösbar?
(3) Warum ist die alternierende Gruppe A_n ein Normalteiler in S_n?
(4) Teilt die Mächtigkeit der Bahn einer Gruppenwirkung die Gruppenordnung?
(5) Wie nennt man den kleinsten Normalteiler N einer Gruppe G, so dass G/N abelsch ist? Wie ist dieser Normalteiler definiert?
(6) Was können Sie über die Anzahl der p-Sylowuntergruppen sagen?
(7) Sind die Gruppen $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ isomorph?

Ringtheorie:

(1) In welchen Ringen ist das Nullideal (0) ein Primdideal?
(2) Was folgt aus der Gleichheit $(a) = (b)$ zweier Hauptideale in einem Integritätsring?
(3) Was sind die Primideale in $\mathbb{Z}$? Welche davon sind maximal und welche prim?
(4) Ist ein Hauptidealring immer faktoriell? Was ist mit der Umkehrung?
(5) Wie lautet das Eisensteinkriterium?
(6) Sei R ein faktorieller Ring und $f \in R[X]$ irreduzibel. Ist dann f auch irreduzibel als Element in $Q(R)[X]$? Gilt auch die Umkehrung?
(7) Kennen Sie einen Ring mit nur einem Maximalideal, welcher kein Körper ist?

Modultheorie:

(1) Sind Untermodul von freien Moduln frei? Wenn nein, gibt es eine Klasse von Ringen, so dass die Aussage stimmt?
(2) Wie lautet der Elementarteilersatz für Hauptidealringe? Sind die Elementarteiler eines Untermoduls $N \subset R^n$ eindeutig bestimmt?
(3) Was ist die Klassifikation von endlich erzeugten abelschen Gruppen?
(4) Sind torsionsfreie Moduln über Hauptidealringen stets frei?
(5) Kennen Sie eine Bedingung die garantiert, dass eine kurze exakte Sequenz spaltet?

Körpertheorie:

(1) Warum ist ein Primkörper eines Körpers immer isomorph zu $\mathbb{Q}$ oder zu $\mathbb{F}_p$, für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$?
(2) Wie ist das Minimalpolynom eines algebraischen Elements definiert? Warum ist das Minimalpolynom immer irreduzibel? Zerfällt es in Linearfaktoren?
(3) Sind die Erweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ normal über $\mathbb{Q}$?
(4) Ist $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ein Körper?
(5) Zusatzfrage: Kann ein algebraisch abgeschlossener Körper nur endlich viele Elemente besitzen?

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen