Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 1
Abgabe: 19.10.2017

Aufgabe 1:

Sei L/K eine algebraische Körperweiterung, $a \in L$ und $\varphi_a \colon K(a) \to K(a)$ die K-lineare Abbildung $\varphi_a(x) = ax$. Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von a gegeben ist durch das charakteristische Polynom χ_{φ_a} von φ_a.

Aufgabe 2:

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, $a \in L$ und $[L \colon K(a)] = s$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass gilt:

(i) $\mathrm{tr}_{L/K}(a) = s \cdot \mathrm{tr}_{K(a)/K}(a)$

(ii) $\mathrm{Nm}_{L/K}(a) = \left(\mathrm{Nm}_{K(a)/K}(a)\right)^s$

Aufgabe 3:

Sei G eine Gruppe, L ein Körper und seien $\chi_1, \ldots, \chi_n \colon G \to L^\times$ paarweise verschiedene Charaktere. Sei V ein L-Vektorraum und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.
Zeigen Sie, dass $\chi_1(g)v_1 + \ldots + \chi_n(g)v_n = 0$ für alle $g \in G$ impliziert, dass $v_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Aufgabe 4:

Sei K ein Körper und V, W zwei K-Vektorräume. Sei G eine Gruppe, die semi-linear auf V und W operiert. Sei $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ die Menge der K-Vektorraumhomomorphismen.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times \mathrm{Hom}_K(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) \\ (g, f) &\longrightarrow g.f \colon v \longmapsto g\left(f\left(g^{-1}(v)\right)\right) \end{aligned}$$

eine semi-lineare Operation von G auf dem K-Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ definiert.

(ii) Sei

$$(\mathrm{Hom}_K(V, W))^G = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid g.f = f \text{ für alle } g \in G\}$$

Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$. Zeigen Sie, dass $f \in (\mathrm{Hom}_K(V, W))^G$, genau dann wenn $g(f(v)) = f(g(v))$, für alle $v \in V, g \in G$.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen