Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 10
Abgabe: 21.12.2017

Aufgabe 1:

Sei A ein Ring und sei G eine endliche Gruppe, die auf A in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei A^G der Unterring der G-Invarianten Elemente.
Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A^G$ und sei $P = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{q} \cap A^G = \mathfrak{p}\}$ die Faser von $\operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} A^G$ von $\mathfrak{p}$. Zeigen Sie, dass G transitiv auf P operiert.
Hinweis: Zeigen Sie, dass für $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2 \in P$ ein $\sigma \in G$ existiert, so dass $\mathfrak{q}_1 \subset \sigma(\mathfrak{q}_2)$.
Sie dürfen die folgende Aussage benutzen: Sei B ein Ring, $\mathfrak{b} \subset B$ ein Ideal und $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ Primideale von B, so dass $\mathfrak{b} \subset \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Dann existiert ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so dass $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}_i$.

Aufgabe 2:

Sei A ein ganzabgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei L/K eine endliche galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe $G = \operatorname{Gal}(L/K)$, und sei B der ganze Abschluss von A in L. Zeigen Sie, dass

(i) $\sigma(B) = B$ für alle $\sigma \in G$.
(ii) $B^G = A$.

Aufgabe 3:

Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus. Dann besitzt f die going-up bzw. going-down Eigenschaft, falls die Erweiterung $f(A) \subset B$ going-up bzw. going-down erfüllt.
Sei $\varphi\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ die induzierte Abbildung. Zeigen Sie, dass wenn φ eine abgeschlossene Abbildung ist, d.h. das Bild einer abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen, der Ringhomomorphismus f going-up erfüllt.
Hinweis: Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B, \varphi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Sie müssen zeigen, dass $\varphi(V(\mathfrak{q})) = \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.

Aufgabe 4:

Sei

$$\begin{aligned} f\colon A = k[X_1, X_2, Y]/(X_2^2 - X_1^2(X_1+1)) &\longrightarrow k[X,Y] \\ X_1 &\longmapsto X^2 - 1 \\ X_2 &\longmapsto X(X^2-1) \\ Y &\longmapsto Y \end{aligned}$$

eine Ringerweiterung. Ziel ist es zu zeigen, dass f die going-down Eigenschaft **nicht** erfüllt.
Sei $\mathfrak{q}_1 = (X+1, Y), \tilde{\mathfrak{q}}_1 = (X-1, Y)$ und $\mathfrak{q}_2 = (Y - (X+1))$ Primideale in $k[X,Y]$. Sei $\mathfrak{p}_2 = f^{-1}(\mathfrak{q}_2)$.

(i) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\mathfrak{q}_1) = f^{-1}(\tilde{\mathfrak{q}}_1) = (X_1, X_2, Y)$.
(ii) Zeigen Sie, dass f einen Isomorphismus $A_{X_1} \cong k[X,Y]_{X^2-1}$ induziert und folgern Sie daraus, dass $\mathfrak{q}_2$ das einzige Primideal mit Eigenschaft $f^{-1}(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_2$ ist. Mit anderen Worten: Die Faser der induzierten Abbildung $\operatorname{Spec} k[X,Y] \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ von dem Punkt $\mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$ ist $\{\mathfrak{q}_2\}$.
(iii) Folgern Sie daraus, dass die going-down Eigenschaft nicht erfüllt sein kann.