Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 11
Abgabe: 18.01.2018

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper und A eine k-Algebra.

(a) Sei A eine endliche k-Algebra. Zeigen Sie, dass A reduziert ist, genau dann wenn A isomorph zu einem direkten Produkt von endlichen Körpererweiterungen von k ist.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass A keine nicht-trivialen idempotente Elemente besitzt. (Erinnerung: $0, 1 \neq e \in A$ ist ein nicht-triviales idempotentes Element, falls $e^2 = e$.) Zeigen Sie dann, dass A ein Körper ist, indem Sie für ein beliebiges $x \in A$ die Kette $(x) \supset (x^2) \supset (x^3) \supset \dots$ betrachten.

(b) Sei nun A eine k-Algebra vom endlichen Typ. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.
  (i) $\dim(A) = 0$;
  (ii) A ist ein endlich dimensionaler k-Vektorraum;
  (iii) $\operatorname{Spec}(A)$ ist endlich;
  (iv) $\operatorname{Spec}\max(A)$ ist endlich.

Aufgabe 2:

(i) Bestimmen Sie $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X]$.
Hinweis: Betrachten Sie die Faser der Projektion $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[X] \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

(ii) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{Z}[X]$, in dem Sie alle Primidealketten angeben.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper und R, S zwei k-Algebren vom endlichen Typ, und sei $T = R \otimes_k S$ ihr Tensorprodukt. Zeigen Sie, dass für die Krulldimension die Gleichung

$$\dim(T) = \dim(R) + \dim(S)$$

gilt.

Aufgabe 4:

Sei k ein Körper. Bestimmen Sie die Dimension der folgenden Ringe.

(i) $R = k[X]/X^2$
(ii) $R = k[X, Y]/(Y^2 - X^3 - X^2)$
(iii) $R = k[X, Y, Z]/(Y - Z^2, XZ - Y^2)$

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen