Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 12

Aufgabe 1:

Sei k ein Körper.

(i) Geben Sie unendlich viele Primideale der Höhe 1 in $k[T_1, T_2]$ an, die in (T_1, T_2) enthalten sind.

(ii) Sei A eine k-Algebra vom endlichen Typ und sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal der Höhe ≥ 2. Zeigen Sie die Existenz von unendlich vielen $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ der Höhe 1 mit $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$.
Hinweis: Reduzieren Sie zunächst auf den Fall $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ und A nullteilerfrei.

Aufgabe 2:

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Hauptidealring.

(i) Bestimmen Sie $\operatorname{Spec} R$.

(ii) Zeigen Sie, dass die die Ringerweiterung $R \subset R[X]$ nicht going-up erfüllt, aber eine Surjektion $\operatorname{Spec} R[X] \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ induziert.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper und R eine k-Algebra vom endlichen Typ. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\dim R[T] = \dim R + 1$

(ii) $\dim R[T, T^{-1}] = \dim R + 1$

(iii) Falls zusätzlich R ein Integritätsbereich, $0 \neq f \in R$ ein Nicht-Nullteiler, dann gilt $\dim R_f = \dim R$.

Aufgabe 4:

Sei k ein Körper, $R = k[X, Y, Z]/(XY, XZ)$, $\mathfrak{m}_1 = (X - 1, Y, Z) \in \operatorname{Spec} R$ und $\mathfrak{m}_2 = (X, Y - 1, Z) \in \operatorname{Spec} R$. Bestimmen Sie $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}_1)$ und $\operatorname{ht}(\mathfrak{m}_2)$.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen