Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

**Kommutative Algebra**
**Blatt 2**
**Abgabe: 26.10.2017**

## Aufgabe 1:

Sei $K \subset M \subset L$ eine Kette von Körpererweiterungen. Sei $\mathfrak{X}$ eine Transzendenzbasis von $M/K$ und $\mathfrak{Z}$ eine Transzendenzbasis von $L/M$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{X} \cup \mathfrak{Z}$ eine Transzendenzbasis von $L/K$ ist.

## Aufgabe 2:

Sei $K$ ein Körper, $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ ein Primideal, $J \subset K[X_1, \dots, X_m]$ ein Primideal, sowie $K_1 = \mathrm{Quot}\,(K[X_1, \dots, X_n]/I)$ und $K_2 = \mathrm{Quot}\,(K[X_1, \dots, X_m]/J)$ die jeweiligen Quotientenkörper. Sei weiter $K_1 \subset K_2$ und $\mathrm{trdeg}_K K_i = k$, für ein $k \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2$.
Zeigen Sie, dass $K_2/K_1$ eine endliche Erweiterung ist.
**Hinweis:** Benutzen Sie Aufgabe 1.

## Aufgabe 3:

Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $R = k[X, Y]/\left(X(X-1)(X+1) - Y^2\right)$ und $K = \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper von $R$.

(i) Zeigen Sie, dass $K/k(X)$ eine endliche Erweiterung ist.
(ii) Folgern Sie daraus, dass $\mathrm{trdeg}_k K = 1$.

## Aufgabe 4:

Sei $c \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = G$ die komplexe Konjugation. Dann existiert eine semi-linear Operation von $G$ auf $V = \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$ definiert durch

$$c \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{d} & -\bar{c} \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$$

(i) Bestimmen Sie die Invarianten $\mathbb{H} := V^G$.
(ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist.

Eine weitere semi-lineare Operation von $G$ auf $W = \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$ ist gegeben durch

$$c \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$$

(iii) Zeigen Sie, dass ein $G$-äquivarianter $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow W$ existiert. Mit anderen Worten: Finden Sie einen $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow W$, der für alle $A \in \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$ die Gleichung $c(f(A)) = f(c(A))$ erfüllt.
(iv) Zeigen Sie, dass kein $G$-äquivarianter $\mathbb{C}$-linearer Isomorphismus $f\colon V \longrightarrow W$ existiert, der für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{2x2}(\mathbb{C})$ die Eigenschaft $f(AB) = f(A)f(B)$ erfüllt.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen