Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

# Kommutative Algebra
# Blatt 3
# Abgabe: 2.11.2017

## Aufgabe 1:

Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeigen Sie, dass $k(X) = \mathrm{Quot}(k[X])$ nicht algebraisch abgeschlossen ist.

## Aufgabe 2:

Sei $L/K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L/K)$, $\mathrm{VR}_K$ die Kategorie der $K$-Vektorräume und $G - \mathrm{VR}_L$ die Kategorie der $L$-Vektorräume mit einer semilinearen Operation von $G$.
Sei $V \in \mathrm{Ob}(G - \mathrm{VR}_L)$. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $V \longmapsto V^G$ eine Äquivalenz

$$(G - \mathrm{VR}_L) \longrightarrow (\mathrm{VR}_K)$$

von Kategorien induziert.

## Aufgabe 3:

Benutzen Sie die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts, um die folgende Isomorphismen von $\mathbb{Z}$-Moduln zu beweisen.

(i) $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ für $m, n \in \mathbb{N}$, $k = \mathrm{ggT}(n, m)$.
(iii) $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = 0$, für $n \in \mathbb{N}$.

## Aufgabe 4:

Sei $R$ ein Ring und seien $N, (M_i)_{i \in I}$ Moduln über $R$. Zeigen Sie den folgenden Isomorphismus von $R$-Moduln:

$$N \otimes_R (\bigoplus_{i \in I} M_i) \cong \bigoplus_{i \in I} (N \otimes_R M_i)$$

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen