Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 4
Abgabe: 9.11.2017

Aufgabe 1:

(i) Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass die R-Moduln $M/\mathfrak{a}M$ und $M \otimes_R (R/\mathfrak{a})$ zueinander isomorph sind.

(ii) Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Zeigen Sie, dass

$$L \otimes_K \overline{K} \cong \prod_{\psi :\, L \hookrightarrow \overline{K}} \overline{K}$$

Aufgabe 2:

Sei R ein Ring und $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie von R-Moduln.

(i) Zeigen Sie, dass $\bigoplus_{i \in I} M_i$ flach ist, genau dann wenn M_i flach ist, für alle $i \in I$.

(ii) Zeigen Sie, dass $R[X]$ flach ist als R-Modul.

Aufgabe 3:

Sei R ein Integritätsbereich. Ein R-Modul M heißt torsionsfrei, falls $rm = 0$, mit $r \in R$, $m \in M$, stets $r = 0$ oder $m = 0$ impliziert. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Jeder flache R-Modul ist torsionsfrei.

(ii) Ist R ein Hauptidealring, so ist umgekehrt auch jeder torsionsfreie R-Modul flach.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal. Sei $k = R/\mathfrak{m}$ der entsprechende Restklassenkörper. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Der R-Modul $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ist auf natürliche Weise ein k-Vektorraum.

(ii) Ist $\mathfrak{m}$ als R-Modul flach, so ist $\dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right) \leq 1$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \otimes_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \cong \mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3$.

(iii) Sei $R = K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring in $n \geq 2$ Variablen über einem Körper K. Konstruieren Sie einen R-Modul, der torsionsfrei, aber nicht flach ist.

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen