Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 5
Abgabe: 16.11.2017

Aufgabe 1:

Sei R ein Ring und $\varphi\colon R^n \longrightarrow R^m$ ein Homomorphismus von freien R-Moduln. Beweisen Sie die folgende Aussagen.

(i) Falls φ surjektiv ist, so gilt $n \geq m$.
(ii) Falls φ injektiv ist, so gilt $n \leq m$.

Aufgabe 2:

(i) Sei R ein Hauptidealring und M ein endlich erzeugter, projektiver R-Modul. Zeigen Sie, dass M frei ist.

(ii) Sei R ein Ring und

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

eine spaltende kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Sei N ein R-Modul.
Zeigen Sie, dass die Sequenz

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt ist und spaltet.

(iii) Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und M ein endlich erzeuger, projektiver R-Modul. Benutzen Sie Nakayama's Lemma um zu zeigen, dass M frei ist.

Aufgabe 3:

Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $f\colon M \longrightarrow M$ ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Fassen Sie M als $R[X]$-Modul auf via $X \cdot m = f(m)$. Benutzen Sie anschließend Nakayama's Lemma.

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Ziel der Aufgabe ist es, einen endlich erzeugten, projektiven R-Modul zu konstruieren, der nicht frei ist.

(i) Sei $\mathfrak{a} = (3, 1 + \sqrt{-5}) \subset R$, $\mathfrak{a}' = (3, 1 - \sqrt{-5}) \subset R$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}'$ maximale Ideale sind.

(ii) Zeigen Sie, dass eine kurze exakte Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' \longrightarrow \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}' \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

existiert.

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}' = (3)$.

(iv) Folgern Sie daraus, dass $\mathfrak{a}$ ein projektiver R-Modul ist.
Erinnerung: Letztes Semester haben wir gesehen, dass in einem Integritätsbereich R ein Ideal $0 \neq I \subset R$ frei ist als R-Modul, genau dann wenn I von einem Element $x \neq 0$ erzeugt wird.