Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 6
Abgabe: 23.11.2017

Aufgabe 1:

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sei $\varphi\colon M \longrightarrow N$ ein Homomorphismus von R-Moduln, sodass der induzierte Homomorphismus

$$\bar{\varphi}\colon M/\mathfrak{m}M \longrightarrow N/\mathfrak{m}N$$

injektiv ist. Ferner sei M endlich erzeugt und N projektiv. Zeigen Sie, dass φ einen Retrakt besitzt, d.h. es existiert ein Homomorphismus $\psi\colon N \longrightarrow M$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_M$. Folgern Sie schließlich daraus, dass M frei ist.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst einen Retrakt zu $\bar{\varphi}$ und konstruieren Sie dazu einen Lift $\psi'\colon N \longrightarrow M$. Zeigen Sie danach, dass $\psi' \circ \varphi$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2:

Seien $I_1, \ldots, I_n$ Ideale in einem Ring R mit $\bigcap_{k=1}^n I_k = (0)$. Zeigen Sie, dass R noethersch ist, genau dann wenn R/I_k noethersch ist, für alle $k = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 3:

Sei R ein Ring und $S \subset R$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge.

(i) Sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass $S^{-1}M = 0$ genau dann, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM = 0$.

(ii) Sei $f\colon M \longrightarrow M'$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten R-Moduln. Ist R noethersch, so ist $S^{-1}f\colon S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}M'$ genau dann ein Isomorphismus, wenn ein $s \in S$ existiert mit $sM' \subset \mathrm{im}(f)$ und $s\ker(f) = 0$.

Aufgabe 4:

Sei R ein Ring, $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, M ein endlich präsentierbarer R-Modul und

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine endliche Präsentation von M. Sei N ein beliebiger R-Modul. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Hom}_R(M, N) \otimes_R R_\mathfrak{p} \cong \mathrm{Hom}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}).$$

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen