Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

# Kommutative Algebra
# Blatt 7
# Abgabe: 30.11.2017

## Aufgabe 1:

Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(R)$ der Quotientenkörper und $k = R/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper von $R$. Sei $M$ ein endlich erzeugter $R$-Modul. Zeigen Sie, dass

$$\dim_K M \otimes_R K \leq \dim_k M \otimes_R k$$

und Gleichheit, genau dann wenn $M$ frei ist.

## Aufgabe 2:

(i) Sei $k$ ein Körper, $R = k[X_1, X_2]/(X_2^2)$ und $S = \{f(X_1) + X_2 \cdot g(X_1) \mid f(X_1) \neq 0\}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Zeigen Sie den folgenden Isomorphismus:

$$S^{-1}R \cong k(X_1)[X_2]/(X_2^2).$$

(ii) Sei $k$ ein Körper. Letztes Semester haben wir gesehen, dass der Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} k[X, Y] &\longrightarrow k[T] \\ X &\longmapsto T^3 \\ Y &\longmapsto T^2 \end{aligned}$$

einen injektiven Ringhomomorphismus $\varphi\colon R = k[X, Y]/(X^2 - Y^3) \longrightarrow k[T]$ induziert. Zeigen Sie, dass $\varphi$ Isomorphismen $R_X \cong k[T]_T$ und $R_Y \cong k[T]_T$ induziert.

## Aufgabe 3:

Sei $\varphi\colon A \longrightarrow B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung $f\colon \mathrm{Spec}\, B \longrightarrow \mathrm{Spec}\, A$ einen Homöomorphismus auf $V(\mathfrak{a})$ induziert.

## Aufgabe 4:

Seien $S \subset T$ zwei multiplikativ abgeschlossene Teilmengen eines Ringes $A$.

(i) Sei $T'$ das Bild von $T$ in $S^{-1}A$. Zeigen Sie, dass

$$T^{-1}A = {T'}^{-1}\left(S^{-1}A\right).$$

(ii) Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, und sei $A' = S^{-1}A$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$A'_{\mathfrak{p}A'} = A_{\mathfrak{p}}.$$

Insbesondere gilt für zwei Primideale $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ die Identität $(A_{\mathfrak{q}})_{\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}} = A_{\mathfrak{p}}$.

(iii) Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal in $A$ und $\bar{S}$ das Bild von $S$ unter der Projektion $A \longrightarrow A/\mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass $\bar{S}$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von $A/\mathfrak{a}$ ist, sowie den Isomorphismus

$$\bar{S}^{-1}(A/\mathfrak{a}) \cong \left(S^{-1}A\right) / \left(S^{-1}\mathfrak{a}\right).$$

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen