Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 8
Abgabe: 7.12.2017

Aufgabe 1:

Ein topologischer Raum X heißt irreduzibel, falls für abgeschlossene Mengen $V_1, V_2 \subset X$ die Gleichung $X = V_1 \cup V_2$ stets $V_1 = X$ oder $V_2 = X$ impliziert.
Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spec} A$ genau dann irreduzibel ist, wenn das Nilradikal $\sqrt{0} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A} \mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal ist.

Aufgabe 2:

(i) Sei

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Sei P ein R-Modul und $g\colon P \longrightarrow M''$ ein Morphismus von R-Moduln. Dann ist

$$P'' = M \times_{M''} P = \{(m, x) \in M \times P \mid f(m) = g(x)\}$$

das Faserprodukt von M und P über M''. Zeigen Sie, dass die kanonische Projektion $f''\colon P'' \longrightarrow P$ surjektiv ist mit $\ker(f'') \cong M'$.

(ii) Sei M ein R-Modul von endlicher Präsentation und sei

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine endliche Präsentation von M. Sei $\varphi\colon R^m \longrightarrow M$ ein surjektiver Morphismus. Zeigen Sie, dass $\ker(\varphi)$ endlich erzeugt ist.
Hinweis: Betrachten Sie $R^n \times_M R^m$.

Aufgabe 3:

Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein Ringhomomorphismus und $\varphi\colon \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ die induzierte Abbildung. Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge, $\mathfrak{a} \subset A$ ein Ideal, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal und sei $B_{\mathfrak{p}}$ die Lokalisierung von B an $f(A \setminus \mathfrak{p})$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) (a) $\varphi^{-1}(\operatorname{Spec} S^{-1}A) = \operatorname{Spec} f(S)^{-1}B$
  (b) $\varphi^{-1}(\mathrm{V}(\mathfrak{a})) = \operatorname{Spec} B/(f(\mathfrak{a})B)$

(ii) (a) Sei $\kappa(\mathfrak{p}) = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Quot}(A/\mathfrak{p})$. Dann ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ das Bild des eindeutigen Punktes von $\operatorname{Spec} \kappa(\mathfrak{p})$ unter der Abbildung $\operatorname{Spec} \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow \operatorname{Spec} A$.
  (b) $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec} B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Spec} B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$

Aufgabe 4:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Der kanonische Ringhomomorphismus $f\colon k[X] \longrightarrow k[X, Y]$ induziert eine Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Spec} k[X, Y] \longrightarrow \operatorname{Spec} k[X]$. Bestimmen Sie die Fasern von φ.

(ii) Der kanonische Ringhomomorphismus $f\colon k[X] \longrightarrow k[X, Y]/(Y^2 - X^2(X + 1))$ induziert eine Abbildung $\varphi\colon \operatorname{Spec} k[X, Y]/(Y^2 - X^2(X+1)) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[X]$. Bestimmen Sie die Fasern von φ.

(iii) Malen Sie Bilder der dazugehörigen affinen algebraischen Mengen.