Prof. Dr. E. Hellmann
Matthias Weirich

WS 2017/2018

Kommutative Algebra
Blatt 9
Abgabe: 14.12.2017

Aufgabe 1:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

(i) Sei $Q = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$. Zeigen Sie, dass Q eine affine algebraische Menge ist und finden Sie Erzeuger von dem Ideal $I(Q) \subset k[X, Y, Z]$. Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{O}(Q) \cong k[T]$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{A}^1 \longrightarrow V(Y^2 - X^3) \subset \mathbb{A}^2, \quad t \longmapsto (t^2, t^3)$$

ein Homöomorphismus, aber kein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2:

Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $Q = V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3$. Zerlegen Sie Q in drei abgeschlossene, paarweise verschiedene, irreduzible Mengen und bestimmen Sie die dazugehörigen Primideale.

Aufgabe 3:

Sei A ein Ring und $f\colon B \longrightarrow B'$ ein ganzer Homomorphismus von A-Algebren. Zeigen Sie, dass für beliebige A-Algebren C der Homomorphismus $f \otimes \mathrm{id}\colon B \otimes_A C \longrightarrow B' \otimes_A C$ ganz ist.

Aufgabe 4:

Sei A ein Ring und sei G eine endliche Gruppe, die auf A in Form von Ringautomorphismen operiert. Sei $A^G = \{a \in A \mid ga = a, \forall g \in G\}$ der Unterring der G-invarianten Elemente.

(i) Zeigen Sie, dass A ganz ist über A^G.

(ii) Sei $S \subset A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge mit $g \cdot S \subset S$ für alle $g \in G$ und sei $S^G = S \cap A^G$. Zeigen Sie, dass die Operation von G eine Operation auf $S^{-1}A$ liefert, und dass gilt

$$\left(S^G\right)^{-1} A^G \cong \left(S^{-1}A\right)^G.$$

Homepage: http://www.uni-muenster.de/Arithm/hellmann/veranstaltungen